ISSN 2701-9012 ZMFP, Vol.1 (2020)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Frank Reinhold & Kristina Reiss

Anschauliche Wege zum Größenvergleich von Brüchen

Zusammenfassung

Bruchrechnen stellt für Schülerinnen und Schüler eine zum Teil erhebliche Herausforderung beim Mathematiklernen in der Sekundarstufe dar. Gerade beim Größenvergleich herrschen häufig typische Fehler vor. Dafür gibt es unterschiedliche Erklärungsansätze, etwa den Rückgriff auf Konzepte natürlicher Zahlen – wie etwa die Existenz eines eindeutigen Nachfolgers – die im Zahlbereich der rationalen Zahlen ihre Tragfähigkeit verlieren. Ein Fokus auf den Vergleich mittels einer regelbasierten Gleicher-Nenner-Strategie, in der der Vergleich rein durch die Anwendung einer formalen und syntaktischen Regel geschieht, erscheint in diesem Zusammenhang ungünstig, da sie aus verschiedenen Gründen fehleranfällig ist. Wir schlagen daher ein Strategienrepertoire mit anschaulichem Zugang zum Größenvergleich vor, den wir in einer Interventionsstudie mit 476 Schülerinnen und Schülern in der sechsten Klasse am Gymnasium erprobt und evaluiert haben. Die

Dr. Frank Reinhold, Institut für Mathematische Bildung Freiburg (IMBF), Pädagogische Hochschule Freiburg, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg, Deutschland
e-mail: frank.reinhold@ph-freiburg.de

Prof. Dr. Kristina Reiss, Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik, TUM School of Education, Technische Universität München, Arcisstraße 21, 80333 München, Deutschland
e-mail: kristina.reiss@tum.de

Ergebnisse zeigen, dass Lernende ein größeres Repertoire an Vergleichsstrategien nutzten, nachdem ihnen dafür Lerngelegenheiten im Mathematikunterricht angeboten wurden. Das breitere Strategienrepertoire wirkt sich zudem positiv auf die Fähigkeit aus, Bruchzahlen zu vergleichen. Wir schließen uns damit zahlreichen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern an und plädieren gegen den Versuch einer nur scheinbaren Vereinfachung des Größenvergleichs durch eine ausschließliche Behandlung regelbasierter Strategien im Mathematikunterricht.

Schlagworte

Bruchzahlen; Größenvergleich; Natural Number Bias; Strategien; Typische Schülerfehler

1. Einführung

Das Erlernen eines versierten Umgangs mit Bruchzahlen stellt oftmals ein „leidiges Kapitel der Schulmathematik für alle Betroffenen“ (Winter, 1999, S. 6) dar. Auf den ersten Blick relativ einfach anmutende Konzepte erweisen sich – spätestens bei der Vermittlung an Schülerinnen und Schüler – als äußerst komplex. Insbesondere beim Größenvergleich von Brüchen treten immer wieder ganz typische Fehler auf, wie etwa der in Abbildung 1 dargestellte, in dem ein Schüler – für ihn selbst zweifelsohne plausibel – begründet, 8/9 sei größer als 7/6 weil „8 und 9 größer sind als 7 und 6“.

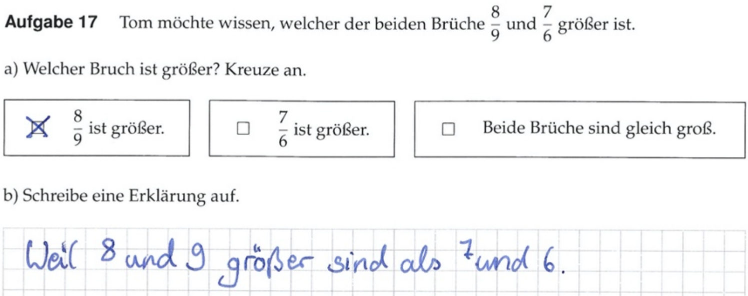

Abbildung 1: Typischer Schülerfehler beim Größenvergleich von Brüchen, der auf einen komponentenweisen Vergleich von Zähler und Nenner als natürliche Zahlen hindeutet. Aus *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6* (S. 273), von F. Reinhold, 2019, Wiesbaden: Springer Spektrum. Copyright 2019 bei Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. Abdruck mit Genehmigung.

Fehler wie dieser sind insbesondere deshalb kritisch, weil Bruchzahlen eine „Schlüsselrolle“ (Booth et al., 2014) in der schulischen Ausbildung in Mathematik zukommt und ein tiefgehendes Verständnis des Bruchzahlbegriffs und der Bruchrechnung ein maßgeblicher Indikator für spätere mathematische Leistungen darstellt (Bailey et al., 2012; Siegler et al., 2012). Eine an Vorstellungen (statt an Prozeduren) orientierte Vermittlung von Basiskonzepten erscheint daher gewinnbringend, um nachhaltiges Wissen über Bruchzahlen aufzubauen (Padberg & Wartha, 2017; Winter, 1999).

In diesem Artikel bereiten wir den internationalen Forschungsstand dazu, welche Ursachen Fehler wie der dargestellte haben können, umfassend auf und leiten unterrichtspraktische Handlungsempfehlungen ab. Dabei stellen wir dar, warum bei der vielfach intensiven Einübung der *Gleicher-Nenner-Strategie* ein nachhaltiger Lernerfolg oftmals ausbleibt – und warum daher die Unterrichtszeit eher in andere, weniger rechenintensive Zugänge zum Größenvergleich investiert werden sollte. Wir begründen unser Plädoyer zur Festigung konzeptuellen Wissens von Bruchzahlen, die mitunter Hand in Hand mit einer gewissen Reduktion der Unterrichtszeit zur Einübung rein prozeduraler „Bruchrechnung“ einhergeht, durch die positive Entwicklung sowohl konzeptuellen als auch prozeduralen Wissens bei Sechstklässlerinnen und Sechstklässlern an Mittelschulen und Gymnasien (Reinhold, Hoch, et al., 2020)[1]. Den von uns vorgeschlagenen unterrichtlichen Ansatz zu anschaulichen Wegen zum Größenvergleich von Brüchen – der nur sekundär auf den Vergleich und vielmehr auf ein tiefgehendes Verständnis für Eigenschaften von Bruchzahlen abzielt – evaluieren wir mittels einer empirischen Studie mit Schülerinnen und Schülern am Gymnasium.

2. Orientierung und Fragestellung

Wir stellen zunächst typische Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern beim Vergleich zweier Bruchzahlen vor und geben einen möglichen – fachdidaktisch und lernpsychologische motivierten – Erklärungsansatz für zahlreiche dieser Fehler an (Abschnitt 2.1). Anschließend schlagen wir ein breites Strategienrepertoire mit anschaulichem Zugang zum Größenvergleich vor (Abschnitt 2.2). Die Darstellungen motivieren die Fragestellungen der in diesem Artikel präsentierten Untersuchung (Abschnitt 2.3).

2.1 Typische Schülerfehler beim Vergleich von Bruchzahlen

Ein für die Fachdidaktik üblicher Zugang zur Identifikation spezifischer Schwierigkeiten von Aufgaben und Inhaltsbereichen der Mathematik ist die Analyse von Fehlern und der Struktur von Fehlermustern, die Aufschluss über Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern geben kann (Eichelmann et al., 2012; Padberg, 1983, 1996; Radatz, 1980; Wittmann,

[1] In der von Reinhold, Hoch, et al. (2020) durchgeführten Studie wurde in einer vierwöchigen Unterrichtssequenz Basiskonzepte an Schülerinnen und Schüler an Mittelschulen und Gymnasien vermittelt. In zwei Experimentalgruppen wurde ein Großteil der Unterrichtszeit auf die Vermittlung eines konzeptuellen Verständnisses von Bruchzahlen mittels ikonischer Darstellungen verwendet. Dabei zeigten sich keine negativen Effekte bezüglich der Rechenleistung der Schülerinnen und Schüler – im Gegenteil konnten sie diese unter bestimmten Bedingungen bei geringerer Lernzeit sogar verbessern.

2007). Speziell im Inhaltsbereich der Bruchrechnung herrschen neben *Flüchtigkeitsfehlern* (d. h. Fehlern, die individuell und aus Unachtsamkeit heraus geschehen sowie augenblicklich korrigiert werden können, vgl. auch Padberg, 1996; Radatz, 1980) und *systematischen Fehlern* (d. h. Fehlern, die derselben Person bei einer spezifischen Aufgabenart wiederholt unterlaufen und auf ein unzureichendes Verständnis des zugrunde liegenden mathematischen Konzepts hindeuten, vgl. auch Padberg, 1996; Radatz, 1980) insbesondere auch typische Fehler vor. Solche *typischen Fehler* können als Indikatoren für domänenspezifische Schwierigkeiten der Bruchrechnung interpretiert werden und werden von unterschiedlichen Personen in unterschiedlichen Situationen unabhängig voneinander begangen (Padberg, 1996; Radatz, 1980).

Die Mathematikdidaktik kann hier auf eine reichhaltige Basis an nationalen wie internationalen Untersuchungen und Erkenntnissen zurückgreifen, die etwa von Eichelmann et al. (2012) in einem umfassenden Review zusammengetragen wurden. Auf der Basis von 33 Studien geben die Autorinnen einen Überblick über 58 typische Fehler, die Schülerinnen und Schülern nicht nur bei der Bruch*rechnung* unterlaufen, sondern bereits bei der Entwicklung des *Bruchzahlbegriffs* sowie insbesondere auch beim Größenvergleich von Brüchen – und das in unterschiedlichen Jahrgangsstufen, bei Schülerinnen und Schülern aus unterschiedlichen Ländern der Welt. Mit Blick auf den Größenvergleich fallen die folgenden typischen Fehler wiederholt auf: Bei der *Größerer-Nenner-Strategie* berücksichtigen Schülerinnen und Schüler ausschließlich die Nenner zweier Brüche und ignorieren ihre Zähler. Es wird der Bruch als größer interpretiert, der den größeren Nenner besitzt (z. B. $2/7 > 3/5$, weil $7 > 5$). Analog existiert mit der *Größerer-Zähler-Strategie* (z. B. $6/7 > 5/4$, weil $6 > 5$) ein weiterer, eng verwandter typischer Fehler.

Strukturell haben diese beiden Fehler eine Gemeinsamkeit, nämlich den Größenvergleich einzelner Komponenten der beiden Brüche auf der Basis von für natürliche Zahlen gültigen Vergleichsstrategien. Für typische Fehler dieser Art – also den Rückgriff auf Konzepte natürlicher Zahlen beim Umgang mit Brüchen, obwohl diese ihre allgemeine Gültigkeit im Kontext rationaler Zahlen verlieren – hat die internationale mathematikdidaktische und lernpsychologische Forschung den englischen Begriff des *Natural Number Bias* geprägt (Ni & Zhou, 2005; siehe auch Reinhold, 2019), der sich nur eher unzureichend ins Deutsche als die *Dominanz einer natürlichen Zahlheuristik* übersetzen lässt. Dies betrifft – neben dem *Größenvergleich* (z. B. Reinhold, Obersteiner, et al., 2020) – drei weitere Aspekte des Bruchzahlbegriffs: die *Dichte* (z. B. Stafylidou & Vosniadou, 2004), die *Darstellung* (z. B. Vamvakoussi et al., 2012) sowie *Operationen* (z. B. Obersteiner et al., 2015; Prediger, 2008)[2]. Eine exemplarische Argumentation eines Schülers mit *Natural Number Bias* im Bereich des Größenvergleichs von Brüchen war bereits in Abbildung 1 der Einleitung zu sehen: Zu vergleichen sind die beiden Brüche 8/9 und 7/6. Gefordert ist eine Entscheidung ob 8/9 größer ist, 7/6 größer ist, oder beide Brüche gleich groß sind sowie eine anschließende Erklärung der eigenen Entscheidung. Der Schüler vermerkt, 8/9 sei der größere Bruch und erläutert seine Wahl damit, dass „8 und 9 größer sind als 7 und 6“ (Abb. 1). Er demonstriert damit einen Zahlvergleich auf der Basis der einzelnen Komponenten der beiden Brüche als natürlichen Zahlen.

Das zu vergleichende Bruchzahlpaar 8/9 und 7/6 weist hierbei ein strukturelles Merkmal auf, wodurch die Aufgabe eine besondere diagnostische Eigenschaft besitzt. Obwohl der erste Bruch 8/9 kleiner ist als der zweite Bruch 7/6, sind beide Komponenten des ersten Bruches größer als beide Komponenten des zweiten Bruches – was gerade die Basis der Erläuterung des Schülers in Abbildung 1 darstellt. Die Aufgabe ist damit *inkongruent* zu natürlichen Zahlkonzepten – Schülerinnen und Schüler, die einem *Natural Number Bias* unterliegen, lösen die Aufgabe konsequent falsch (Abb. 1). Aufgaben, die trotz eines ausgeprägten *Natural Number Bias* korrekt gelöst werden können, werden als *kongruent* bezeichnet (Vamvakoussi et al., 2012; siehe auch Reinhold, 2019). Ein Beispiel dafür stellt etwa das Bruchzahlpaar 2/5 und 7/8 dar, das mit einer ähnlichen (fehlerhaften) Argumentation korrekt gelöst werden würde: 2/5 ist kleiner als 7/8, weil 2 und 5 kleiner sind als 7 und 8. Insbesondere sind Größenvergleichsaufgaben mit gleichnamigen Brüchen grundsätzlich kongruent, während der Vergleich zweier Brüche mit gleichem Zähler stets zu inkongruenten Aufgaben führt.

Die Unterscheidung kongruenter und inkongruenter Aufgaben im Bereich des Größenvergleichs von Brüchen erscheint einerseits für die mathematikdidaktische Forschung relevant (da beiden Aufgabentypen ein unterschiedliches diagnostisches Potential zukommt, das in zahlreichen

[2] Einen umfassenden Überblick über notwendige Konzeptwechsel bei der Zahlbereichserweiterung von natürlichen zu rationalen Zahlen liefern etwa Prediger (2008), Winter (1999) oder Padberg und Wartha (2017).

Studien genutzt wird, z. B. Gómez & Dartnell, 2019) und andererseits auch für den Mathematikunterricht von zentraler praktischer Bedeutung: Ein lernpsychologisches und weitgehend anerkanntes Kriterium für den Beginn eines erfolgreichen Konzeptwechsels – hier von natürlichen Zahlkonzepten zu Bruchzahlkonzepten – ist die Unzufriedenheit mit den etablierten Konzepten bei den Schülerinnen und Schülern (Posner et al., 1982; siehe auch Duit & Treagust, 2003). Man geht davon aus, dass sie dafür die Grenzen der bisher tragfähigen Konzepte selbst erfahren müssen und daher insbesondere Aufgaben bearbeiten sollen, die unter Verwendung ihrer bewährten Konzepte gerade *nicht* lösbar sind. Mit kongruenten Größenvergleichsaufgaben kann dies im Mathematikunterricht nur unzureichend umgesetzt werden, während inkongruente Aufgaben gerade das Potential zur Erzeugung derartiger kognitiver Konflikte bergen. Vor diesem Hintergrund sollte auch das „Gleichnamigmachen" als algorithmische und ökonomische Vergleichsstrategie – die etwa Winter (1999, S. 37–39) sehr anschaulich als „Segen und Fluch zugleich" beschreibt – bei der im ersten Schritt aus jeder Größenvergleichsaufgabe eine kongruente Aufgabe generiert wird, kritisch hinterfragt werden (Reinhold, 2019). Wir schlagen daher im folgenden Abschnitt – im Einklang mit anderen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern (z. B. Clarke & Roche, 2009; Obersteiner et al., 2013; Padberg & Wartha, 2017; Post & Cramer, 1987) – einen breiten und anschaulichen Zugang zum Größenvergleich vor, der die dargestellten mathematikdidaktischen und lernpsychologischen Erkenntnisse berücksichtigt.

2.2 Strategienrepertoire als Weg zum Vergleich von Brüchen

Eine fachdidaktische Antwort auf typische Schülerfehler im Bereich des Größenvergleichs von Brüchen kann der Rückgriff auf ein vielfältiges Repertoire an Vergleichsstrategien darstellen – verbunden mit dem Ziel, Lernende zu einem flexiblen Einsatz passender Strategien zu befähigen (Clarke & Roche[3], 2009; Post et al., 1986; Post & Cramer, 1987; Reinhold, 2019; Winter, 1999). Hierbei erscheint es zweckmäßig zwischen *eigenschaftsbasierten Strategien* (in denen ein Vergleich semantisch begründet wird) und *regelbasierten Strategien* (in denen der Vergleich rein durch die

[3] Die Studie von Clarke und Roche (2009) liefert einen umfassenden Überblick über von Schülerinnen und Schülern tatsächlich verwendete Vergleichsstrategien – ohne direkte Instruktion dieser Strategien. Sie zeigt unter anderem auf, welche Strategien eher selten oder nur von leistungsstarken Schülerinnen und Schülern genutzt werden.

Anwendung einer formalen und syntaktischen Regel geschieht) zu unterscheiden[4]. Einen Überblick über alle in diesem Abschnitt aufgeführten Vergleichsstrategien liefert Tabelle 1 am Ende des Abschnitts.

Eigenschaftsbasiertes Vergleichsstrategien

Eigenschaftsbasierte Vergleichsstrategien gründen auf einer konkreten Eigenschaft des zu vergleichenden Bruchpaars, die ausgenutzt wird, um einen Größenvergleich mittels semantischer Argumentation durchzuführen.

Bei *transitiven Strategien* wird der Größenvergleich über den Bezug zu einer dritten Zahl durchgeführt, die zwischen den beiden zu vergleichenden Brüchen liegt (Post et al., 1986)[5]. Sie erscheinen immer dann zweckmäßig, wenn der Vergleich der beiden gegebenen Brüche mit der dritten Zahl einfach zu bewerkstelligen ist. Hier stellen 1 und 1/2 typische Bezugszahlen dar (Obersteiner et al., 2020), die von leistungsstarken Schülerinnen und Schülern zum Teil auch ohne formale Instruktion herangezogen werden (M Behr & Post, 1986; Clarke & Roche, 2009). So böte sich für den oben dargestellten Vergleich von 2/5 mit 7/8 etwa 1/2 als Bezugszahl an, während der ebenfalls oben aufgeführte Vergleich von 8/9 mit 7/6 mit Bezug zu 1 (also zu einem vollen Ganzen, vgl. Abb. 2, oben) adäquat durchgeführt werden kann.

Bei der *residualen Strategie* wird zum Zweck des Größenvergleichs zweier Brüche die Frage beantwortet, „wie viel“ den beiden (echten) Brüchen zum vollständigen Ganzen fehlt (Post & Cramer, 1987). Praktikabel kann diese Strategie etwa bei Bruchzahlpaaren wie 7/8 und 8/9 sein, de nen jeweils „ein Stück“ (unterschiedlicher Größe) zum Ganzen fehlt: 7/8 < 8/9, weil 1/8 größer als 1/9 ist. Residuale Vergleiche stellen für Schülerinnen und Schüler eine größere Herausforderung dar als transitive Vergleiche (Clarke & Roche, 2009). Sie können im Unterricht mit ikonischen Darstellungen adäquat unterstützt werden (Reinhold, 2019).

---

[4] Die in diesem Abschnitt folgende Darstellung stellt eine streng geraffte Zusammenfassung der in Reinhold (2019, S. 76–84) nachzulesenden Abhandlung zu unterschiedlichen Strategien beim Größenvergleich von Brüchen dar.

[5] Die Ergebnisse des *Rational Number Projects* (Merlyn Behr et al., 1983; Post et al., 1986), das in den 1980er und 1990er Jahren in den USA durchgeführt wurde, trugen (insbesondere durch aufwendige Interviewstudien) maßgeblich zur Berücksichtigung individueller Vorstellungen bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs bei, die bis heute die Fachdidaktik und die Bildungspolitik prägen.

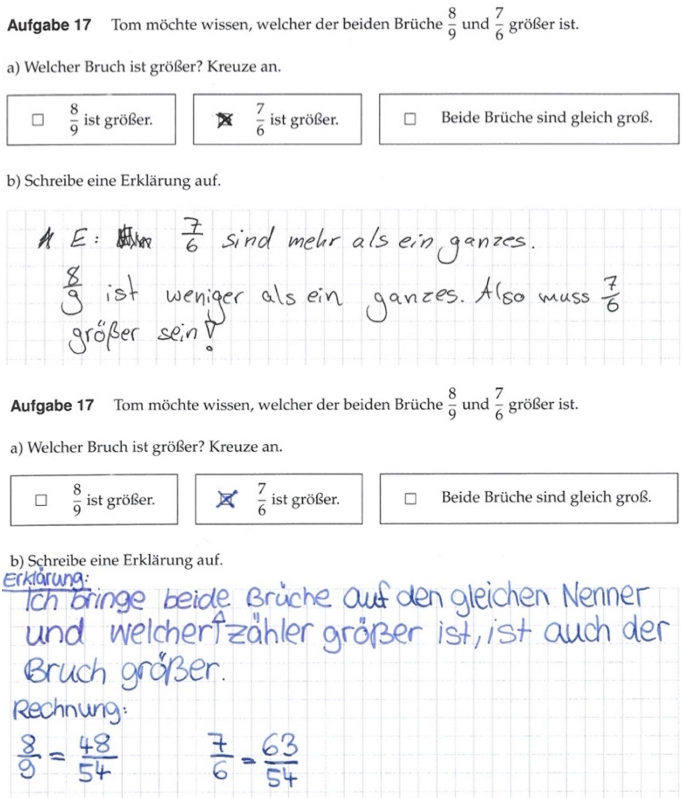

Abbildung 2: Exemplarische Schülerlösungen beim Größenvergleich von Brüchen unter Rückgriff auf die Bezugszahl 1 (eigenschaftsbasiert, oben) und einen gemeinsamen Nenner (regelbasiert, unten). Aus *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6* (S. 247), von F. Reinhold, 2019, Wiesbaden: Springer Spektrum. Copyright 2019 bei Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. Abdruck mit Genehmigung.

Bei bestimmten Bruchzahlpaaren kann der Rückgriff auf die *Größe der Stücke* zielführend sein (Post & Cramer, 1987) – insbesondere dann, wenn ikonische Darstellungen den Größenvergleich anschaulich begleiten (Lamon, 2012)[6]. Die darauf aufbauenden Strategien nutzen die semantische Bedeutung des Nenners: Kleinere Nenner führen zu größeren

[6] Das Lehrbuch von Lamon (2012) illustriert– gestützt durch zahlreiche Beispiele – eine Vielzahl anschaulicher Zugänge zum Bruchzahlkonzept und zur Bruchrechnung.

Stücken. Diese Strategien sind nicht nur bei nennergleichen Brüchen (z. B. 5/7 < 6/7, weil die Stücke jeweils gleich groß sind und 5 Stück weniger sind als 6 Stück) und zählergleichen Brüchen praktikabel (z. B. 5/8 > 5/10, weil „Achtel sind größer als Zehntel“, Abb. 3, oben), sie bilden insbesondere auch die semantische Grundlage für regelbasierte Strategien (Abschnitt 2.2.2).

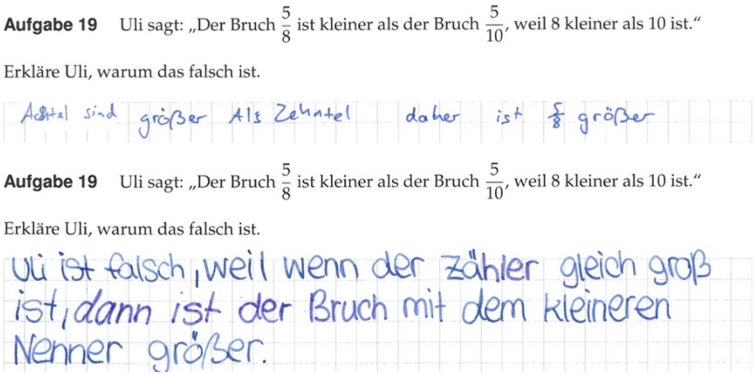

Abbildung 3: Exemplarische Schülerlösungen beim Größenvergleich von Brüchen unter Rückgriff einen gemeinsamen Zähler mittels der Größe der Stücke (eigenschaftsbasiert, oben) und ohne Bezug zu inhaltlichen Vorstellungen (regelbasiert, unten).

Zentrales Merkmal eigenschaftsbasierter Vergleichsstrategien – und damit auch ihr fachdidaktisches Potential für den Mathematikunterricht – ist, dass sie *gerade nicht* grundsätzlich zielführend sind, sondern nach spezifischen Eigenschaften des zu vergleichenden Bruchzahlpaares ausgewählt werden müssen (Clarke & Roche, 2009; Reinhold, 2019; Winter, 1999). Können sie angewendet werden, ermöglichen sie einen eleganten und effizienten Vergleich ohne algorithmisches Arbeiten – ein Vorgehen, auf das auch Mathematikexperten und -expertinnen beim Größenvergleich zurückgreifen (Obersteiner et al., 2013)[7]. Hier erscheint gerade die Suche nach geeigneten eigenschaftsbasierten Vergleichsstrategien zur Ausbildung eines tragfähigen Bruchzahlbegriffs gewinnbringend (Clarke & Roche, 2009; Post et al., 1986; Sowder, 1988; Winter, 1999). Eine besondere Bedeutung kommt dabei der Betrachtung von Brüchen als holistischen Symbolen (Obersteiner et al., 2013) zu, d. h. als *eine* Zahl

[7] In der Studie von Obersteiner et al. (2013) deuten die Bearbeitungszeiten von Mathematikexpertinnen und Mathematikexperten an, dass sie auf eine Vielzahl unterschiedlicher eigenschaftsbasierter Strategien zurückgreifen.

bestehend aus Zähler *und* Nenner im Gegensatz zur *isolierten Betrachtung* von Zähler und Nenner als natürliche Zahlen – sei es im Zusammenspiel von Anzahl und Größe der Stücke, oder bei transitiven Strategien beim Finden einer passenden Bezugszahl mittels anfänglicher Abschätzung der Größenordnung der Brüche (DeWolf & Vosniadou, 2015; Meert et al., 2010)[8].

Regelbasierte Vergleichsstrategien

Regelbasierten Vergleichsstrategien liegt ein meist vollständig formalisiertes, algorithmisches Vorgehen zugrunde (Reinhold, 2019): Bei der *Gleicher-Nenner-Strategie* werden die beiden Brüche zunächst durch Erweitern (oder seltener: Kürzen) auf den gleichen Nenner gebracht und anschließend die Zähler der umgewandelten Brüche verglichen. Der Bruch, der jetzt den größeren Zähler hat, ist größer. Analog werden bei der *Gleicher-Zähler-Strategie* die Brüche zuerst auf den gleichen Zähler gebracht und der Größenvergleich anschließend auf der Basis der unterschiedlichen Nenner durchgeführt, wobei „der Bruch mit dem kleineren Nenner größer“ ist (Abb. 3, unten).

Der (vermeintliche) Vorteil regelbasierter Strategien ist ihre universelle Gültigkeit und – damit verbunden – die Möglichkeit, sie bei *jedem beliebigen* Bruchzahlpaar anwenden zu können. Wie aus der oben formulierten Form der Strategien (oder hier besser: Regeln) jedoch hervorgeht, ist es durchaus möglich diese Strategien „ohne Bezug auf inhaltliche Vorstellungen, gewissermaßen blindlings“ (Winter, 1999, S. 38) durchzuführen – was keineswegs Ziel eines modernen Bruchrechenunterrichts sein kann (Padberg & Wartha, 2017). Versteht man zudem den *Natural Number Bias* – also unter anderem die isolierte Betrachtung von Zähler und Nenner als natürliche Zahlen statt einer Betrachtung eines Bruches als Symbol für *eine* Zahl – als Grundlage für verschiedene typische Schülerfehler beim Größenvergleich, kann die (ausschließliche) Betrachtung dieser Strategien im Mathematikunterricht problematisch erscheinen, denn beide Strategien zielen gerade darauf ab, Zähler (oder Nenner) *isoliert* zu betrachten: „Im jeweils ersten Schritt konzentriert man sich auf eines der

---

[8] Die Studie von Meert et al. (2010) lässt auf der Basis von Lösungsraten und Bearbeitungszeiten den Schluss zu, dass Schülerinnen und Schülern der Vergleich von Brüchen insbesondere dann schwerer fällt, wenn die beiden Bruchzahlen nahe beieinander liegen. Dies wird in der Literatur als „Distanzeffekt“ bezeichnet und auf eine zugrundeliegende Größenordnungsvorstellung (engl.: *fraction magnitude*) zurückgeführt.

Art	Vergleichsstrategie	Beispiel
Eigenschafts-basiert	Bezugszahl 1/2 (transitiv)	3/7 < 5/9, weil 3/7 < 1/2 und 5/9 > 1/2.
	Bezugszahl 1 (transitiv)	8/9 < 7/6, weil 8/9 < 1 und 7/6 > 1.
	Bezugszahl 1 (residual)	4/5 < 6/7, weil je ein Stück zum Ganzen fehlt und 1/7 < 1/5.
	Größe der Stücke	*Gleicher Zähler:* 3/4 > 3/5, weil Viertel größer sind als Fünftel. *Gleicher Nenner:* 5/7 > 3/7, weil die Stücke jeweils gleich groß sind und 5 Stück mehr sind als 3 Stück.
	Ikonische Darstellung	3/4 < 5/6, weil 5/6 auf dem Zahlenstrahl weiter rechts liegt.
Regelbasiert	Gleicher Zähler	4/9 < 4/7, weil bei Brüchen mit gleichem Zähler der Bruch mit dem kleineren Nenner größer ist.
	Gleicher Nenner	4/9 < 7/9, weil bei gleichnamigen Brüchen der Bruch mit dem größeren Zähler größer ist.

Tabelle 1: Überblick über eigenschaftsbasierte und regelbasierte Vergleichsstrategien (Reinhold, 2019, S. 83).

beiden Symbole, im zweiten Schritt wird der Vergleich ausschließlich anhand der Größe der anderen Zahl vollzogen“ (Reinhold, 2019, S. 81) – im Fall gleicher Nenner sogar unter Rückgriff auf das (für Bruchzahlen gerade nicht tragfähige, vgl. etwa Prediger, 2008) Zählkonzept. Insbesondere erscheint daher der (doch durchaus übliche) *erste Zugang* zum Größenvergleich über die algorithmische Gleicher-Nenner-Strategie eher ungeeignet zur Entwicklung tragfähiger Konzepte zu Bruchzahlen: Als notwendig erachtete kognitive Konflikte im Sinne einer Unzufriedenheit mit etablierten Konzepten natürlicher Zahlen (vgl. Abschnitt 2.1) lassen sich wohl nicht dadurch hervorrufen, dass (nach algorithmischer Umformung) gerade auf diese Konzepte zurückgegriffen wird. Wir stellen im Folgenden eine empirisch evaluierte unterrichtliche Sequenz dar (Abschnitt 3.2), in der ein breites Repertoire an Strategien vermittelt wird und regelbasierte Vergleichsstrategien aus eigenschaftsbasierten Strategien entwickelt werden, wobei der zeitliche Umfang der Lernsequenz im Vergleich zur ausschließlichen Betrachtung der Gleicher-Nenner-Strategie nicht vergrößert wird.

3. Fragestellung

Aus den genannten Gründen schlagen wir einen Zugang zum Größenvergleich von Bruchzahlen über die Vermittlung eines breiten Repertoires an Strategien vor, bei dem zunächst auf eigenschaftsbasierte Strategien und solche Bruchzahlpaare fokussiert wird, die sich mit ebendiesen adäquat lösen lassen. Hierbei wird der Rückgriff auf die Größe der Stücke genutzt, um im Anschluss regelbasierte Strategien zu motivieren – verbunden mit der Idee diese dann einzusetzen, wenn eigenschaftsbasierte Strategien versagen. Am Ende der Sequenz steht der flexible Umgang mit unterschiedlichen Strategien im Fokus. Der zugrundeliegende wissenschaftliche Zugang wird in Abschnitt 3.1 beschrieben und eine mögliche Umsetzung im Mathematikunterricht wird in Abschnitt 3.2 dargestellt und anschließend evaluiert.

3.1 Wissenschaftliches Vorgehen

In der zugrundeliegenden Untersuchung wurden Schülerinnen und Schüler einer von zwei Gruppen zugeordnet, denen der Zugang zum Größenvergleich unterschiedlich vermittelt wurde. Der Vergleich der beiden Gruppen erlaubt Aussagen zum Erfolg des von uns in diesem Artikel vorgeschlagenen Zugangs, da das Vorwissen zum Bruchzahlbegriff vor der Intervention in beiden Gruppen vergleichbar gut ausgebildet war (vgl. Abschnitt 7.2). Dazu formulieren wir die folgenden für die Unterrichtspraxis sowie die Fachwissenschaft gleichermaßen relevanten Fragestellungen:

(1) Lösen Schülerinnen und Schüler Größenvergleichsaufgaben zu Brüchen, bei denen sie eine Erklärung für ihr Vorgehen angeben sollen, besser, wenn ihnen im Mathematikunterricht Lerngelegenheiten für ein breites Repertoire an Vergleichsstrategien (statt einer kanonischen Vergleichsstrategie) angeboten werden? Und (2) nutzen sie das ihnen vermittelte größere Repertoire in diesem Zusammenhang auch? (3) Wirkt sich ein größeres Repertoire an Vergleichsstrategien positiv auf die Fähigkeit aus, Bruchzahlen in einer generischen Testsituation zu vergleichen?

Zur Beantwortung von Frage (1) betrachten wir die Lösungswahrscheinlichkeit bei inkongruenten Aufgaben zum Größenvergleich von Brüchen bei Schülerinnen und Schülern unterschiedlicher Interventionsgruppen, in denen von ihnen insbesondere eine Erklärung ihres Vorgehens verlangt wird. Dabei wird angenommen, dass Lernende der Experimentalgruppe, in der ein Strategienrepertoire als Weg zum Größenvergleich von Brüchen im Unterricht genutzt wurde, höhere Lösungswahrscheinlichkeiten erzielen, als Lernende der Kontrollgruppe, denen die Verwendung einer kanonischen Vergleichsstrategie vermittelt wurde. Um Frage (2) zu beantworten, untersuchen wir ob die Lernenden zur Lösung dieser Aufgaben eigenschaftsbasierte oder regelbasierte Strategien verwenden. Dabei berücksichtigen wir ausschließlich korrekte Antworten und vermuten, dass Lernende der Experimentalgruppe häufiger auf eigenschaftsbasierte Strategien zurückgreifen als Lernende der Kontrollgruppe.

Zur Beantwortung von Frage (3) klassifizieren wir die Schülerinnen und Schüler unabhängig ihrer Zugehörigkeit zu einer der beiden Interventionsgruppen danach, welche Strategien sie in den vorher genannten Aufgaben nutzen und betrachten ihre Lösungswahrscheinlichkeit in zusätzlichen, generischen Vergleichsaufgaben, d. h. solchen, in denen sie ausschließlich eine Lösung und keine Erklärung angeben müssen. Wir gehen davon aus, dass hier die Schülerinnen und Schüler bessere Leistungen erbringen, die über ein breiteres Strategienrepertoire verfügen.

Hinweise zum methodischen Vorgehen sowie die quantitative Analyse der den Handlungsempfehlungen zugrundeliegenden empirischen Studie werden im Anhang (Abschnitt 7) dieses Artikels detailliert berichtet.

3.2 Durchführung und Unterrichtsmaterial

Der untersuchte Mathematikunterricht umfasste 16 Unterrichtsstunden und fokussierte auf die Vermittlung eines tragfähigen Bruchzahlbegriffs in Jahrgangsstufe 6. Der Größenvergleich von Brüchen stellte den letzten Inhaltsbereich dar und wurde in drei Stunden im direkten Anschluss an die gemischte Schreibweise für unechte Brüche unterrichtet. Nachfolgend wird der Unterrichtsansatz in der Experimentalgruppe beschrieben, dem die Idee einer Vermittlung eines Strategienrepertoires zugrunde liegt.

Aufbauend auf dem Unterrichtsinhalt der Vorstunde begann die Sequenz „Welcher Bruch ist größer?“ mit der Unterscheidung, ob *ein einzelner* Bruch weniger oder mehr als ein Ganzes darstellt. Dabei wurde auf den Zahlenstrahl als Repräsentation zusätzlich zur symbolischen Darstellung zurückgegriffen. Die Begriffe unechter und echter Bruch wurden anschließend wiederholt. Gemeinsam mit der Lehrkraft sollten die Schülerinnen und Schüler darauf aufbauend zu dem Schluss kommen, dass unechte Brüche stets größer sind als echte Brüche. Eine Aufgabe zum Größenvergleich von Brüchen, die sich alle unter Rückgriff auf diese transitive Strategie lösen ließen, rundete diesen Teilaspekt ab.

Die Grenzen der Anwendbarkeit dieser Vergleichsstrategie wurde etwa durch die Darstellung von Aufgaben wie den Vergleich von 2/3 und 5/11 thematisiert: Beide Brüche sind kleiner als 1 und damit erscheinen weitere Strategien notwendig. Die Sensibilisierung für weitere Vergleichszahlen wurde daher für 1/2 sukzessive aufgebaut. In einem ersten Schritt sollten die Lernenden entscheiden, ob in ikonischen Darstellungen (*eines* Bruches) mehr oder weniger als die Hälfte markiert ist (Abb. 4, oben). Im Unterrichtsgespräch sollten im Anschluss an diese Aufgabe Vermutungen gesammelt werden, wann ein Bruch größer oder kleiner als 1/2 ist. Im Anschluss daran sollten die Schülerinnen und Schüler entscheiden, ob ein symbolisch dargestellter Bruch auf dem Zahlenstrahl links oder rechts von 1/2 liegt (Abb. 4, unten). Die aufgestellten Vermutungen darüber, wann ein Bruch kleiner oder größer als 1/2 ist, konnten während der Bearbeitung durch die Lernenden selbst verifiziert werden und im Klassengespräch bestätigt werden. Nachdem die Schülerinnen und Schüler für einen solchen Blick auf ein Halb sensibilisiert wurden, konnten die gewonnenen Erfahrungen auf den Vergleich *zweier* Bruchzahlen ausgeweitet werden: „2/3 ist größer als 5/11, weil 2/3 mehr ist als ein Halb und 5/11 weniger ist als ein Halb.“ In einem nächsten Schritt wurden Bruchzahlvergleiche auf der Basis symbolisch dargestellter Brüche durchgeführt, die sich unter Rückgriff auf ebendiese transitive Vergleichsstrategie lösen ließen.

Anschließend wurde nach einem ähnlichen Schema die Größe der Stücke als eigenschaftsbasierte Vergleichsstrategie vorgestellt, die explizit auch als semantische Motivation für die beiden danach vermittelten regelbasierten Strategien genutzt wurde. Der flexible Umgang mit Strategien wurde am Ende der Lernsequenz durch vermischte Aufgaben, in denen jeweils unterschiedliche Strategien plausibel erscheinen konnten, unterstützt. Abschließend sollten konkrete Beispiele wie „Ist 47/91 oder 79/83 größer?“ eingesetzt werden, die den Vorteil eines Rückgriffs auf approximative Größenvorstellungen offenbaren: „47/91 ist ungefähr ein Halb, während 79/83 fast ein Ganzes ist. Also ist 79/83 größer als 47/91.“ Ein Vergleich auf der Basis regelbasierter Strategien – insbesondere mittels arithmetischer Zugänge – erscheint in Beispielen dieser Art gerade nicht zielführend.

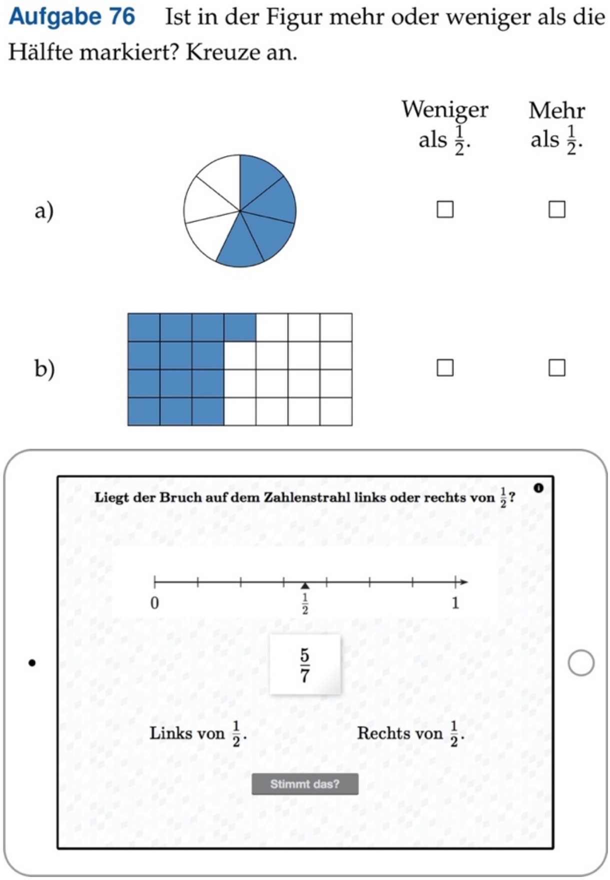

Abbildung 4: Aufgaben zur Sensibilisierung der Schülerinnen und Schüler auf 1/2 als Vergleichszahl für transitive Vergleichsstrategien auf der Basis rein-ikonischer Darstellungen (oben, papierbasierte Lernumgebung) sowie auf der Basis symbolisch dargestellter Brüche auf dem Zahlenstrahl (unten, digitale Lernumgebung als interaktives E-Book).

Die beschriebene Lernumgebung ist sowohl als papierbasiertes Arbeitsheft (Hoch et al., 2018a) als auch als interaktives E-Book (Hoch et al., 2018b) kostenfrei erhältlich[9]. Für die in diesem Artikel betrachtete Stichprobe am Gymnasium zeigten sich hier keine Unterschiede zwischen den

[9] Neben der papierbasierten Version des Arbeitsheftes und dem E-Book gibt es auch eine (ebenfalls kostenfreie) plattformunabhängige Version des Materials online unter https://www.alice.edu.tum.de/.

Schülerinnen und Schülern der Gruppe, die mit dem vorgestellten Material papierbasiert und der Gruppe, die mit dem Material auf Tablet-PCs gearbeitet haben (Reinhold, Hoch, et al., 2020). Eine Zusammenfassung der beiden Interventionsgruppen für die nachfolgenden Analysen erscheint daher plausibel. Handlungsleitfäden für Lehrkräfte zum Einsatz der Lernumgebungen – auch in anderen Teilgebieten der Bruchrechnung – stehen ebenfalls zur Verfügung (Reinhold, Hoch, Werner, Richter-Gebert, et al., 2018; Reinhold et al., 2019).

4. Ergebnisse und Analyse

Nachfolgend werden aus den Ergebnissen der Untersuchung abgeleitete Antworten auf die Fragestellungen dargestellt und diskutiert.

4.1 Lösung von Größenvergleichsaufgaben mit Erklärungen

Fragestellung (1) fokussiert auf eine angenommene Verbesserung der Lösungswahrscheinlichkeit in Größenvergleichsaufgaben zu Brüchen – bei denen die Schülerinnen und Schüler eine Erklärung für ihr Vorgehen angeben sollen – durch die Vermittlung eines Strategienrepertoires statt einer kanonischen Vergleichsstrategie. Falls dies zuträfe, sollten Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe in inkongruenten Größenvergleichsaufgaben höhere Lösungswahrscheinlichkeit aufweisen, als Lernende der Kontrollgruppe[10]. Die Ergebnisse zeigen, dass dies jedoch nur bedingt zutrifft, da diese Aufgaben in beiden Interventionsgruppen vergleichbar gut gelöst wurden (Abschnitt 7.2).

Ein Strategienrepertoire als Alternative zu einer kanonischen Vergleichsstrategie erwies sich also im Kontext unserer Untersuchung nicht als vorteilhaft, um die Lösungsrate bei inkongruenten Größenvergleichsaufgaben zu verbessern. Bemerkenswert erscheint an dieser Stelle jedoch, dass Lernende, denen ein breites Strategienrepertoire vermittelt wurde (aus dem zunächst eine passende Strategie ausgewählt werden

[10] In der dargestellten Untersuchung betrachten wir die Nutzung von Strategien in einer tendenziell leistungsstarken Stichprobe von Sechstklässlerinnen und Sechstklässlern. Für die Untersuchung typischer Schülerfehler mit Bezug zum *Natural Number Bias* hat sich der Blick auf eher leistungsschwache Schülerinnen und Schüler als gewinnbringender Zugang herausgestellt, der etwa in der Studie von Reinhold, Hoch, et al. (2020) für ähnliche Aufgaben und in einem ähnlichen Setting dargestellt wird.

muss), vergleichbare Leistungen erzielten wie Lernende der Kontrollgruppe, in denen eine kanonische allgemeingültige Strategie vermittelt wurde (die für jedes beliebige Bruchzahlpaar angewendet werden kann).

4.2 Verwendung eines Strategienrepertoires

Fragestellung (2) befasst sich damit, ob Schülerinnen und Schüler ein größeres Repertoire an Vergleichsstrategien nutzen, nachdem ihnen dafür Lerngelegenheiten angeboten wurden. Ein Indikator dafür wäre, dass Lernende der Experimentalgruppe in ihren korrekten Lösungen zu den in 4.1 betrachteten inkongruenten Größenvergleichsaufgaben häufiger auf eigenschaftsbasierte Strategien zurückgreifen, als Lernende der Kontrollgruppe. Dies konnte durch die durchgeführte Untersuchung bestätigt werden (Abschnitt 7.2).

Wir interpretieren dies als Indikator dafür, dass Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe über ein breiteres Repertoire an Größenvergleichsstrategien verfügten (und dieses auch einsetzen konnten) als Lernende der Kontrollgruppe. Durch das Design der Untersuchung kann dieser Effekt kausal interpretiert und als positiver Einfluss des vorgeschlagenen Zugangs zum Größenvergleich bewertet werden: Mathematiklehrkräfte können davon ausgehen, dass Lernende durchaus ein breites Repertoire an Vergleichsstrategien erwerben und dieses auch flexibel Nutzen können, wenn ihnen im Unterricht adäquate Lerngelegenheiten dafür eingeräumt werden.

Ein qualitativer Überblick der konkreten verwendeten Vergleichsstrategien in den beiden inkongruenten Aufgaben ist in Abbildung 5 für beide Interventionsgruppen getrennt dargestellt, wobei auch hier ausschließlich korrekte Lösungen berücksichtigt wurden. Eigenschaftsbasierte Strategien sind in Blautönen und regelbasierte Strategien in Orangetönen abgebildet. In Item 1 ($8/9 < 7/6$) nutzten etwa 75% der Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe eine transitive Strategie mit Bezugszahl 1, während in der Kontrollgruppe nur etwa 46% zum korrekten Vergleich darauf zurückgriffen, dass 7/6 ein unechter Bruch ist. Bemerkenswert erscheint weiter, dass auch 46% der Lernenden der Kontrollgruppe die beiden Brüche 8/9 und 7/6 auf einen gemeinsamen Nenner brachten, obwohl die Bezugszahl 1 offensichtlich erscheint. In der Experimentalgruppe waren dies nur 24%. Wir interpretieren dieses Ergebnis dahingehend, dass auch im Unterricht der Kontrollgruppe eigenschaftsbasierte Vergleichsstrategien bisweilen eine Rolle spielten, wohl aber das algorithmische Bringen auf den gleichen Nenner – wie vermutet – als

„*das* kanonische Vergleichsverfahren“ (Winter, 1999, S. 38) dargestellt wurde. Ein Indiz dafür ist auch, dass selbst in Item 2 (5/8 > 5/10), in dem die beiden Brüche bereits über einen gemeinsamen Zähler verfügten, 21% der Lernenden der Kontrollgruppe (aber nur 3% in der Experimentalgruppe) die Brüche dennoch gleichnamig machten. Die vorherrschende Vergleichsstrategie bei Schülerinnen und Schülern der Experimentalgruppe war hier der Rückgriff auf die Größe der Stücke über die semantische Bedeutung des Nenners (49% im Vergleich zu 19% in der Kontrollgruppe) – also gerade kein algorithmisches Vorgehen.

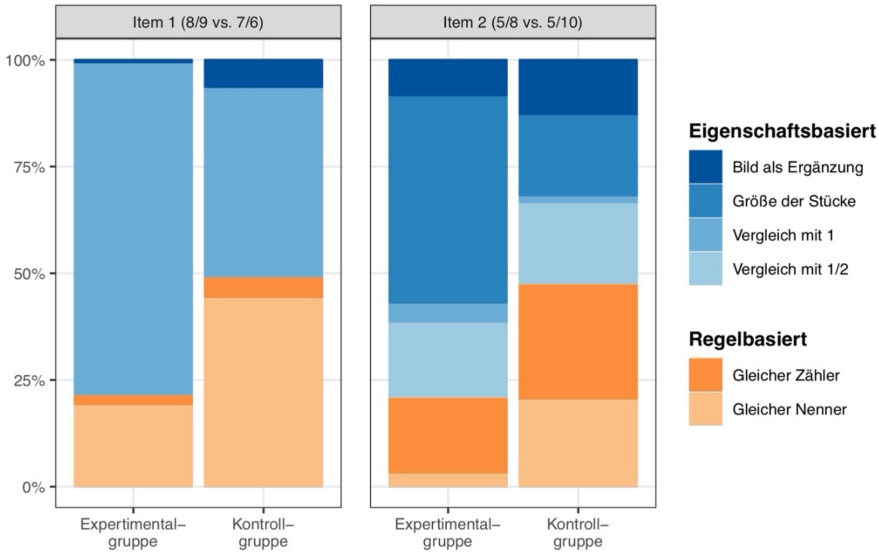

Abbildung 5: Verwendete Strategien beim Größenvergleich in den beiden *Erklären*-Aufgaben für die Experimentalgruppe und die Kontrollgruppe. Berücksichtigt wurden nur korrekte Lösungen.

4.3 Vorteil eines Strategienrepertoires

Forschungsfrage (3) fokussiert auf die als positiv angenommene Wirkung eines größeren Repertoires an Vergleichsstrategien auf die Fähigkeit, Bruchzahlen zu vergleichen. Im Einklang mit dieser Vermutung wäre das Ergebnis, dass gerade die Schülerinnen und Schüler, die unabhängig von ihrer Interventionsgruppe vermehrt auf eigenschaftsbasierte Strategien zurückgreifen, in zusätzlichen Vergleichsaufgaben (in denen sie ausschließlich eine Lösung angeben und keine Erklärung verfassen müssen) bessere Leistungen erbringen. Die Ergebnisse unserer Untersuchung zeigen, dass dies der Fall ist (Abschnitt 7.2).

Dies kann dahingehend interpretiert werden, dass Schülerinnen und Schülern, die über ein breites Repertoire an Vergleichsstrategien für Bruchzahlen verfügten, ein flexibler Einsatz dieses Wissens auch in solchen Aufgaben gelang, in denen keine Erklärung, sondern lediglich die Angabe der Lösung von ihnen gefordert wurde – was ihnen einen entscheidenden Vorteil gegenüber den Lernenden verschaffte, die ausschließlich auf regelbasierte Vergleichsstrategien zurückgriffen. Dies ist insofern bemerkenswert als regelbasierte Strategien für *jedes beliebige* Bruchzahlpaar genutzt werden können, während Schülerinnen und Schüler eigenschaftsbasierte Strategien zunächst *passend* zum Bruchzahlpaar *auswählen* müssen (Abschnitt 2.2). Das Ergebnis unterstreicht damit empirisch die von zahlreichen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern geführte Kritik am Versuch einer Ökonomisierung des Größenvergleichs durch eine ausschließliche Behandlung regelbasierter Strategien im Mathematikunterricht, verbunden mit dem vermeintlichen Ziel einer „Entlastung der Denkarbeit und Kontrollierbarkeit der Prozedur“ (Winter, 1999, S. 39; vgl. auch Clarke & Roche, 2009; Obersteiner et al., 2013; Padberg & Wartha, 2017; Post & Cramer, 1987).

5. Kritische Diskussion

Abschließend fassen wir die Ergebnisse unserer Untersuchung kursorisch zusammen (Abschnitt 5.1), reflektieren den von uns vorgeschlagenen unterrichtlichen Zugang zum Größenvergleich im Kontext des Mathematikunterrichts sowie der mathematikdidaktischen Forschung (Abschnitt 5.2) und zeigen Grenzen der Untersuchung sowie weiterführende Fragestellungen auf (Abschnitt 5.3).

5.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

In der betrachteten Schülergruppe am Gymnasium führte die Vermittlung eines Strategienrepertoires nicht maßgeblich zu einer Vermeidung typischer Schülerfehler beim Größenvergleich von Brüchen. Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe lösten inkongruente Vergleichsaufgaben nur unwesentlich besser als Lernende der Kontrollgruppe. Allerdings zeigte sich ein bemerkenswerter Unterschied in der Verwendung eigenschaftsbasierter Strategien, sodass Mathematiklehrkräfte durchaus davon ausgehen können, dass die Betrachtung unterschiedlicher Vergleichsstrategien im Mathematikunterricht die Lernenden positiv prägt: Eine Vermittlung des vorgeschlagenen Repertoires statt eines Zugangs über die Gleicher-Nenner-Strategie als kanonische Vergleichsstrategie führte in der berichteten Studie – bei gleicher Unterrichtszeit – zu einer flexibleren Nutzung von Strategien und einer höheren Lösungsrate in generischen Testaufgaben zum Größenvergleich. Den Schülerinnen und Schülern gelang die Anwendung eines breiten Strategienrepertoires also insbesondere auch in den Aufgaben, in denen ausschließlich die Nennung des größeren Bruches und keine Begründungen verlangt waren – obwohl alle Aufgaben mittels der kanonischen Gleicher-Nenner-Strategie zu lösen gewesen wären.

Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Vermittlung semantischer Größenvergleichsstrategien weitreichende Vorteile gegenüber einer ausschließlichen Behandlung der Gleicher-Nenner-Strategie im Mathematikunterricht besitzt: Lernende, denen ein Strategienrepertoire vermittelt wurde, demonstrierten ein größeres konzeptuelles Verständnis für Bruchzahlen, das sie auch in generischen Testsituationen erfolgreich anwenden konnten. Der von uns skizzierte konkrete Zugang zeigt zudem, dass die Vermittlung eines Strategienrepertoires nicht zwingend mit einem höheren Zeitaufwand einhergehen muss: In der berichteten Untersuchung stand der Experimentalgruppe und der Kontrollgruppe die gleiche Zeit zur Verfügung.

5.2 Reflexion der Anwendung auf die Praxis und die Forschung

Eigenschaftsbasierte Vergleichsstrategien liefern eine adäquate Ergänzung zur ausschließlichen Behandlung der Gleicher-Nenner-Strategie im Anfangsunterricht der Bruchrechnung. Sie erlauben einen semantischen Größenvergleich (Winter, 1999), werden von leistungsstarken Kindern – zum Teil auch ohne direkte Instruktion – (Clarke & Roche, 2009; Post & Cramer, 1987) sowie von Expertinnen und Experten genutzt (Obersteiner et al., 2013), sind im Einklang mit den kompetenzorientiert formulierten Bildungszielen des Mathematikunterrichts (KMK, 2003) und erweisen sich auch in der von uns berichteten Studie als vorteilhaft.

Der von uns vorgeschlagene Zugang kann im Mathematikunterricht direkt umgesetzt werden. Dabei stellen digitale Schulbücher eine zusätzliche methodische Ergänzung dar, die besonders dann vorteilhaft ist, wenn sie adaptiv arbeiten und individuelles Feedback geben (Hillmayr et al., 2017). Diese Unterstützungsmaßnahmen können Lehrkräften helfen, Schülerinnen und Schüler individuell beim Erwerb unterschiedlicher Strategien zu unterstützen, was gerade für tendenziell leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sein volles Potential entfaltet (Reinhold, Hoch, et al., 2020)[11].

Die von uns geführte Argumentation hin zu einem Bruchrechenunterricht, der weniger auf regelbasierten Prozeduren und mehr auf tragfähigen, konzeptuellen Vorstellungen beruht, beschränkt sich nicht nur auf den Größenvergleich, sondern umfasst den gesamten Anfangsunterricht der Bruchrechnung (Malle, 2004; Padberg & Wartha, 2017; Reinhold, 2019; Winter, 1999). Ein kompetenzorientierter Mathematikunterricht im Sinne der Bildungsstandards (KMK, 2003) erfordert einen solchen weniger regelbasierten, sondern eher an der Semantik einzelner Lerninhalte orientierten Mathematikunterricht durch die Berücksichtigung unterschiedlicher prozessorientierter Kompetenzen: Am Beispiel der in diesem Artikel fokussierten Größenvergleiche können eigenschaftsbasierte Vergleiche argumentative und kommunikative Kompetenzen fördern. Die Nutzung ikonischer Repräsentationen als Rückgriff bei Vergleichen erfordert einen Darstellungswechsel, der nicht nur in der Bruchrechendidaktik als gewinnbringend angesehen wird, sondern auch Lernziel eines modernen Mathematikunterrichts im Allgemeinen ist. Es ist ein zentrales Ergebnis unserer Studie, dass eine solche Gestaltung nicht zwingend mit zeitlichen Problemen im Unterricht einhergehen muss. Es erscheint durchaus angebracht, die Zeit für am Kalkül orientierten reinen Rechenphasen entsprechend zu kürzen – ohne dabei Einbußen in den Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler befürchten zu müssen. Hierbei sind Lehrkräfte jedoch besonders gefordert, da selbst aktuelle kompetenzorientierte Schulbücher im Inhaltsbereich der Bruchrechnung weiterhin vermehrt auf prozedurales und regelbasiertes Arbeiten fokussieren (Lenz et al., in Druck).

Zusätzlich sollten vor dem Hintergrund der in Abschnitt 2.1 dargestellten Aufgabenkategorien generelle Aussagen über „leichte“ und „schwere“ Aufgaben im Bereich der Bruchrechnung anders gedacht werden. Es

[11] In der Studie von Reinhold, Hoch, et al. (2020) zeigt sich, dass instruktionspsychologisch als vorteilhaft angenommene individuelle Hilfestellungen digitaler Lernumgebungen (z. B. kongruente Gestensteuerung in Phasen der Aktivierung, adaptive Aufgabenschwierigkeiten in Übungsphasen und individuelles Feedback nach der Bearbeitung einzelner Aufgaben) gerade für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler den entscheidenden Vorteil bergen, Wissen im Mathematikunterricht nachhaltig aufzubauen.

können eher „leichte" Aufgaben auch gerade *kongruente* Aufgaben sein, die nicht nur mit einem mathematisch korrekten Lösungsweg, sondern auch mit typischen Fehlerstrategien korrekt gelöst werden können – was nicht dem intendierten Schwierigkeitsbegriff entspricht. Aufgaben dieser Art für einen „eher seichten" Unterrichtseinstieg auszuwählen, ist aus einer fachdidaktischen Perspektive nicht zu empfehlen.

5.3 Limitationen und weiterführende Fragestellungen

In diesem Artikel haben wir den *Natural Number Bias* als mögliche Erklärung für zahlreiche typische Schülerfehler im Bereich der Bruchrechnung – insbesondere beim Größenvergleich – angeführt. Zu erwähnen ist jedoch, dass er nicht alle typischen Fehlermuster erklärt, wie etwa die *Lücken-Strategie* (engl.: *gap thinking*), bei der der Bruch als größer bezeichnet wird, dem weniger Stücke – unabhängig von deren Größe – zum Ganzen fehlen (Gómez et al., 2017). Bisher ist nicht abschließend geklärt, wie der *Natural Number Bias* mit typischen Fehlern dieser Art zusammenhängt, ob ein breites Strategienrepertoire hier unterstützen kann oder unter bestimmten Voraussetzungen typische Fehler dieser Art sogar hervorrufen kann.

Die Annahme, dass ein breites Strategienrepertoire typische Fehler reduzieren kann, konnte in der in diesem Artikel dargestellten Untersuchung nicht bestätigt werden. Ein Grund dafür könnte sein, dass die betrachteten Schülerinnen und Schüler am Gymnasium eher leistungsstark waren und daher seltener zu diesen typischen Fehlern tendieren. Erste Hinweise dafür, dass bei eher leistungsschwächeren Lernenden der erwartete Effekt eintritt, finden sich bei Reinhold (2019)[12]. Ein fokussierter Blick auf andere Schularten und jüngere Schülerinnen und Schüler könnte eine Klärung der Hypothese liefern[13].

---

[12] Die Ergebnisse in Reinhold (2019) lassen in der Tendenz vermuten, dass sich bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern eigenschaftsbasierte Strategien ein geeigneter Zugang zum Bruchzahlkonzept sind, während vorhandene Schwierigkeiten in der Arithmetik den Kompetenzerwerb durch Rückgriff auf die Gleicher-Nenner-Strategie als kanonische und einzige Vergleichsstrategie erschwert.

[13] In der Studie von Reinhold, Obersteiner, et al. (2020) zeigt sich mit Blick auf eine tendenziell schwächere Gruppe von Schülerinnen und Schülern für ähnliche Aufgaben und in einem ähnlichen Setting, dass sich klassenübergreifende Cluster von Lernenden finden lassen, die von spezifischen Fehlvorstellungen betroffen sind – die also in unterschiedlicher prototypischer Weise einem *Natural Number Bias* unterliegen.

Es ist anzunehmen, dass ein Strategienrepertoire auch auf andere Teilbereiche der Bruchrechnung (und explizit auch die Bruch*rechnung*) transferiert werden kann, da viele eigenschaftsbasierte Strategien die Ausbildung einer Größenordnungsvorstellung von Bruchzahlen benötigen (Reinhold, Obersteiner, et al., 2020). Hier eröffnen sich für die Mathematikdidaktik relevante Forschungsfragen, die in nachfolgenden Studien beantwortet werden sollten.

Ein Nachteil des vorgeschlagenen unterrichtlichen Vorgehens könnte sein, dass die Addition von Bruchzahlen, in der bei ungleichnamigen Brüchen gerade zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden muss, nicht bereits vorab durch unterrichtliche Aktivitäten entlastet wird. Hier sollte überprüft werden, ob Schülerinnen und Schüler, denen die Gleicher-Nenner-Strategie nicht als kanonische Vergleichsstrategie vermittelt wird, später Nachteile beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen erfahren.

6. Literaturverzeichnis

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(3), 447–455.

Behr, M, & Post, T. (1986). Estimation and Children's Concept of Rational Number Size. In H. Schoen & M. Zweng (Hrsg.), *Estimation and Mental Computation: 1986 NCTM Yearbook* (S. 103–111). National Council of Teachers of Mathematics.

Behr, Merlyn, Lesh, R. A., Post, T. R., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Hrsg.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (S. 91–125). Academic Press.

Booth, J. L., Newton, K. J., & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, *118*, 110–118.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127–138.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39–49.

Duit, R., & Treagust, D. F. (2003). Conceptual change: A powerful framework for improving science teaching and learning. *International Journal of Science Education*, *25*(6), 671–688.

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L., & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen—Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(1), 29–57.

Gómez, D., & Dartnell, P. (2019). Middle Schoolers' Biases and Strategies in a Fraction Comparison Task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(6), 1233–1250.

Gómez, D., Silva, E., & Dartnell, P. (2017). Mind the Gap: Congruency and Gap Effects on Engineering Students' Fraction Comparison. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Hrsg.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 353–360). PME.

Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L., & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe: Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit*. Waxmann.

Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K., & Richter-Gebert, J. (2018a). *Bruchrechnen. Bruchzahlen & Bruchteile greifen & begreifen* (3. Aufl.). Technische Universität München.

Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Reiss, K., & Richter-Gebert, J. (2018b). *Fractions. Getting in touch with rational numbers [Web version]*. Technical University of Munich. https://alice.edu.tum.de/

KMK (Hrsg.). (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Luchterhand.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Routledge.

Lenz, K., Wittmann, G., & Holzäpfel, L. (in Druck). Aufgaben als Lerngelegenheiten für konzeptuelles und prozedurales Wissen zu Brüchen – Eine vergleichende Schulbuchanalyse. *mathematica didactica*.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren, 123*, 4–8.

Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M.-P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(3), 244–259.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Obersteiner, A., Alibali, M. W., & Marupudi, V. (2020). Complex fraction comparisons and the natural number bias: The role of benchmarks. *Learning and Instruction*, *67*, 101307.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). Expert mathematicians' natural number bias in fraction comparison. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, S. 393–400). PME.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, *107*(3), 537–555.

Padberg, F. (1983). Über Schülerfehler im Bereich der Bruchrechnung. In H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Zahlbereiche: Didaktische Materialien für die Hauptschule* (S. 45–57). Klett.

Padberg, F. (1996). Aus Fehlern lernen: Den Mathematikunterricht durch Fehleranalysen verbessern. *Friedrich-Jahresheft XIV: Prüfen und beurteilen*, 56–59.

Padberg, F. (2002). Anschauliche Vorerfahrungen zum Bruchzahlbegriff und zu einfachen Rechenoperationen mit Brüchen in Modellierungskontexten. In *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche* (3. Aufl., S. 289–299). Springer Spektrum.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, *66*(2), 211–227.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-Based Observations About Children's Learning of Rational Number Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *8*(1), 39–48.

Post, T., & Cramer, K. (1987). Children's strategies when ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher*, *35*(2), 33–35.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, *18*(1), 3–17.

Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Vieweg+Teubner.

Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive: Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6*. Springer.

Reinhold, F., Hoch, S., & Reiss, K. (2019). Bruchzahlen mit Tablet-PCs. Interaktive E-Books im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, *215*, 22–25.

Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Reiss, K., & Richter-Gebert, J. (2018). *Tablet-PCs im Mathematikunterricht der Klasse 6. Ergebnisse des Forschungsprojektes ALICE:Bruchrechnen*. Waxmann.

Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J., & Reiss, K. (2018). *Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht. Workshop Mathematik (Deutsche Version)*. Technische Universität München.

Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J., & Reiss, K. (2020). Learning fractions with and without educational technology: What matters for high-achieving and low-achieving students? *Learning and Instruction*, *65*, 101264.

Reinhold, F., Obersteiner, A., Hoch, S., Hofer, S. I., & Reiss, K. (2020). The Interplay Between the Natural Number Bias and Fraction Magnitude Processing in Low-Achieving Students. *Frontiers in Education*, *5*, 29.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691–697.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: The role of development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert & M. Behr (Hrsg.), *Number concepts and operations in the middle grades* (S. 182–197). National Council of Teachers of Mathematics.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503–518.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344–355.

Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf

Wittmann, G. (2007). Von Fehleranalysen zur Fehlerkultur. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 175–178). Franzbecker.

7. Anhang

7.1 Darstellung der Methode

Die Forschungsfragen wurden quantitativ mittels einer Interventionsstudie im Pre-Post-Kontrollgruppendesign beantwortet.

Stichprobe

Wir greifen auf Daten aus dem Projekt *ALICE:Bruchrechnen* zurück (Reinhold, Hoch, et al., 2020; Reinhold, Hoch, Werner, Reiss, et al., 2018) und fokussieren auf $N = 476$ Schülerinnen und Schülern in insgesamt 19 Schulklassen an Gymnasien. In zwei Experimentalgruppen ($N = 362$) wurde die Einführung in die Bruchrechnung zu Beginn der sechsten Jahrgangsstufe mit einem fachdidaktisch und kognitionspsychologisch aufbereitetem Curriculum – insbesondere auch den Größenvergleich betreffend – unterrichtet (Reinhold, 2019), wobei in diesem Artikel die beiden Experimentalgruppen mit Fokus auf den fachdidaktischen Zugang zum Größenvergleich zusammengefasst werden. In einer Kontrollgruppe ($N = 126$) unterrichteten die Lehrkräfte ohne äußere Vorgabe und mit traditionellen Schulbüchern. Der Studie liegt die Annahme zugrunde, dass in der Kontrollgruppe die Gleicher-Nenner Strategie als kanonische Vergleichsstrategie vermittelt wurde.

Erhebungsinstrumente

Zur Erfassung des *Vorwissens* der Schülerinnen und Schüler vor dem Bruchrechenunterricht wurde ein Pretest mit zehn Aufgaben (Cronbach $\alpha = 0{,}82$) in Anlehnung an Padbergs (2002) Test zu *Anschaulichen Vorerfahrungen zum Bruchzahlbegriff* konzipiert, der insbesondere Alltagsbrüche wie etwa 3/4, 1/2 oder auch 1/3 umfasst und zur Erhebung von Vorstellungen zu Bruchzahlen vor einer ersten Auseinandersetzung im Schulunterricht geeignet erscheint.

Die verwendeten Strategien wurden mit zwei Größenvergleichsaufgaben erfasst, in denen die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen schriftlich erklären sollten. Die beiden Aufgaben 8/9 und 7/6 (Abb. 2) sowie 5/8 und 5/10 (Abb. 3) sind im Verlauf des Artikels bereits vorgestellt worden. Die Antworten zu den beiden Aufgaben in dieser Skala *Erklären* umfassen die Kompetenz *Mathematisch kommunizieren* (KMK, 2003) und wurden von zwei unabhängigen Personen in sieben Kategorien eingeordnet: (i) Bild als Ergänzung, (ii) Größe der Stücke, (iii) Vergleich mit 1, (iv) Vergleich mit 1/2, (v) gleicher Zähler, (vi) gleicher Nenner und (vii) falsch.

Kategorien (i) bis (iv) beschreiben eigenschaftsbasierte Strategien, Kategorien (v) und (vi) regelbasierte Strategien. Die Übereinstimmung der Urteile der beiden Personen kann als nahezu perfekt bezeichnet werden, $0{,}86 \leq \kappa \leq 0{,}92$.

Zudem beantworteten die Schülerinnen und Schüler 13 weitere Aufgaben ($\alpha = 0{,}69$) zum Größenvergleich von Brüchen, in denen lediglich die Lösung, jedoch keine Erklärung gefordert wurde. Aufgaben in dieser Skala *Anwenden* umfassen sowohl die Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* sowie die Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* (KMK, 2003).

Eine detaillierte Darstellung der Entwicklung und Gestaltung der Instrumente sowie die vollständigen Testinstrumente liefert Reinhold (2019).

Durchführung und Unterrichtsmaterial

Die gesamte Intervention umfasste 16 Unterrichtsstunden und fokussierte auf die Vermittlung eines tragfähigen Bruchzahlbegriffs in Jahrgangsstufe 6. Der Größenvergleich von Brüchen stellte den letzten Inhaltsbereich dar und wurde in drei Stunden im direkten Anschluss an die gemischte Schreibweise für unechte Brüche unterrichtet. Der Unterrichtsansatz in der Experimentalgruppe, dem die Idee einer Vermittlung eines Strategienrepertoires zugrunde liegt, wird im Haupttext in Abschnitt 3.2 ausführlich beschrieben.

Daten und statistische Auswertung

Zur Untersuchung von Unterschieden zwischen den Gruppen werden generalisierte lineare gemischte Modelle (*Generalized linear mixed model*, GLMMs) verwendet, da diese gegenüber anderen statistischen Methoden bezüglich der Handhabung nicht-balancierter Designs mit genesteten Stichproben sowie dichotomer Daten maßgebliche Vorteile besitzen.

Die Modelle enthalten die Prädiktorvariablen als *Fixed Effects*. Diese sind das *Vorwissen* (als metrische Variable, Anzahl der im Vortest gelösten Aufgaben, z-standardisiert) als Kontrollvariable sowie die jeweilige *Gruppierungsvariable* der Schülerinnen und Schüler (als kategoriale Variable). Die Modelle beinhalten zudem sog. *Random Effects* für *Schülerinnen und Schüler* (zur Abbildung der individuellen Unterschiede zwischen Schülerinnen und Schülern), *Schulklassen* (zur Abbildung der genesteten Stichprobe) und *Aufgaben* (zur Abbildung der Unterschiede in den generellen Aufgabenschwierigkeiten).

Die Schätzwerte werden in den Tabellen als log-odds angegeben, die zur Interpretation der Ergebnisse in Wahrscheinlichkeiten für eine korrekte Antwort (*Estimated Marginal Means*, EMMs) umgewandelt werden.

7.2 Darstellung der Ergebnisse

Nachfolgend werden die Ergebnisse der Analysen unter Bezug auf die Fragestellungen dargestellt und diskutiert. Dabei wurden mit Blick auf die verwendeten Strategien in Abschnitt 4.3 und Abschnitt 4.4 nur die Schülerinnen und Schüler betrachtet, die die erhobenen Aufgaben korrekt gelöst hatten, was zu einer Reduzierung der Stichprobengröße von $N = 476$ auf $N = 244$ führte.

Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

Die Vergleichbarkeit der beiden Gruppen vor der Intervention wurde über die Erfassung des Vorwissens zum Bruchzahlbegriff zu Beginn von Jahrgangsstufe überprüft. In einem Welsh t-Test (zur Abbildung der ungleich großen Gruppen) zeigte sich kein signifikanter Unterschied zwischen Schülerinnen und Schülern der Experimentalgruppe ($M = 51{,}2\%$, $SD = 28{,}1$) und Lernenden der Kontrollgruppe ($M = 46{,}3\%$, $SD = 27{,}7$) in der Lösungsrate der Aufgaben im Vortest, $t(257{,}3) = 1{,}75$, $p = 0{,}08$. Das Vorwissen zum Bruchzahlbegriff war also vor der Intervention in beiden Gruppen vergleichbar gut ausgebildet. Wir verwenden dennoch in allen nachfolgenden quantitativen Analysen das Vorwissen als Korrekturvariable, um für individuelle Unterschiede zwischen den Schülerinnen und Schülern *vor* der Intervention statistisch zu kontrollieren.

Lösung von Größenvergleichsaufgaben mit Erklärungen

Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe lösten im Mittel 73,4%, 95% CI [63,7; 81,2] der beiden *Erklären*-Aufgaben korrekt und Lernende der Kontrollgruppe 68,5%, 95% CI [54,8; 79,6]. Der Unterschied in den mittleren Lösungsraten erwies sich (nach Kontrolle des Vorwissens und nach Berücksichtigung der Klassenstruktur der Stichprobe) als nicht signifikant, $p = 0{,}48$. Die statistischen Kennwerte des berechneten GLMM können Tabelle A1 (links) entnommen werden.

Ein Strategienrepertoire als Alternative zu einer kanonischen Vergleichsstrategie erwies sich also im Kontext unserer Untersuchung nicht als vorteilhaft, um Schülerfehler in inkongruenten Größenvergleichsaufgaben zu reduzieren. Bemerkenswert erscheint an dieser Stelle jedoch, dass Lernende, denen ein breites Strategienrepertoire vermittelt wurde, vergleichbare (und sogar tendenziell bessere) Leistungen erzielten, als Lernende der Kontrollgruppe, in denen eine kanonische allgemeingültige Strategie vermittelt wurde, die für jedes beliebige Bruchzahlpaar angewendet werden kann.

		Lösungswahrscheinlichkeit			Nutzung eigenschaftsbasierter Strategien	
Fixed effects		Est.	*SE*		Est.	*SE*
Intercept		0,777 **	0,298		0,049	0,403
Vorwissen		0,698 ***	0,113		0,313 *	0,135
Interventionsgruppe						
Kontrollgruppe (Baseline)		—	—		—	—
Experimentalgruppe		0,237	0,311		1,487 **	0,497
Random effects	*N*	Var.	*SD*	*N*	Var.	*SD*
Schülerinnen und Schüler	476	1,299	1,140	244	0,657	0,810
Schulklassen	19	0,207	0,454	19	0,607	0,779
Aufgaben	2	0,038	0,194	2	0,000	0,000

Tabelle A1: Schätzwerte der Parameter der beiden generalisierten linearen Mischmodelle für die Lösungswahrscheinlichkeit (links) und die Nutzung eigenschaftsbasierter Vergleichsstrategien (rechts) in den Erklären-Aufgaben. Schätzwerte (Est. = Estimates) sind als log-odds angegeben. Signifikanzniveaus: *$p < 0{,}05$, **$p < 0{,}01$, ***$p < 0{,}001$.

Verwendung eines Strategienrepertoires

Zur korrekten Lösung der beiden *Erklären*-Aufgaben nutzten Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe zu 83,4%, 95% CI [73,8; 90,0] eine eigenschaftsbasierte Vergleichsstrategie, während Lernende der Kontrollgruppe nur in 53,3%, 95% CI [34,1; 71,5] darauf zurückgriffen. Dieser Unterschied in der Nutzung eigenschaftsbasierter Strategien zwischen den Interventionsgruppen ist signifikant, $p < 0{,}01$. Die statistischen Kennwerte des berechneten GLMM können Tabelle A1 (rechts) entnommen werden. Ein Maß für die Stärke dieses Effektes ist die Veränderung der Varianz zwischen den untersuchten 19 Schulklassen, wenn die Einteilung in Interventions- und Experimentalgruppen im Modell berücksichtigt wird. Dies reduziert in diesem Fall die Varianz zwischen den Schulklassen um 49,7%, was als bemerkenswerter Interventionseffekt bezeichnet werden kann.

Vorteil eines Strategienrepertoires

Es zeigte sich ein positiver Effekt eines Strategienrepertoires auf die Lösung weiterer Aufgaben zum Größenvergleich von Brüchen: Sowohl die Lernenden, die in einer *Erklären*-Aufgabe auf eine eigenschaftsbasierte Strategie zurückgriffen (*EMM* = 89,0%, 95% CI [81,2; 93,8]) als auch die Lernenden, die in beiden *Erklären*-Aufgabe eigenschaftsbasierte Strategien nutzten (*EMM* = 88,4%, 95% CI [80,8; 93,3]), lösten *Anwenden*-Aufgaben signifikant häufiger richtig, als Schülerinnen und Schüler, die in den *Erklären*-Aufgaben ausschließlich regelbasiert vorgingen (*EMM* = 80,5%, 95% CI [68,3; 88,8]), beide ps < 0,01. Die statistischen Kennwerte des berechneten GLMM können Tabelle A2 entnommen werden.

		Lösungswahrscheinlichkeit	
Fixed effects		Est.	*SE*
Intercept		1,417 ***	0,331
Vorwissen		0,420 ***	0,064
Demonstriertes Strategienrepertoire in den Erklären-Aufgaben			
Kein Rückgriff auf eigenschaftsbasierte Strategien (Baseline)		—	—
Einmaliger Rückgriff auf eigenschaftsbasierte Strategien		0,671 **	0,198
Verwendung eigenschaftsbasierter Strategien in beiden Items		0,616 **	0,179
Random effects	*N*	Var.	*SD*
Schülerinnen und Schüler	244	0,296	0,544
Schulklassen	19	0,019	0,139
Aufgaben	13	1,077	1,038

Tabelle A2: Schätzwerte der Parameter des generalisierten linearen Mischmodells für die Lösungswahrscheinlichkeit in den Anwenden-Aufgaben. Schätzwerte (Est. = Estimates) sind als log-odds angegeben. Signifikanzniveaus: *p < 0,05, **p < 0,01, ***p < 0,001.

Die sehr hohen Lösungsraten dürfen an dieser Stelle nicht verwundern, da für die Analyse nur die besonders leistungsstarken Schülerinnen und Schüler berücksichtigt wurden, die beide *Erklären*-Aufgaben korrekt ge löst hatten. Ein Maß für die Stärke dieses Effektes ist die Veränderung der Varianz zwischen den 244 leistungsstarken Lernenden, wenn die Einteilung bezüglich des demonstrierten Strategienrepertoires im Modell berücksichtigt wird. Dies reduziert hier die Varianz zwischen den Schülerinnen und Schülern um 18,0%, was im Hinblick auf die bereits selektierte, leistungsstarke Stichprobe bemerkenswert erscheint.