ISSN 2701-9012 ZMFP, Vol.1 (2020)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Stephanie Schuler & Gerald Wittmann

Analyse von Konzeptionen früher mathematischer Bildung

Auf dem Weg zu einem anschlussfähigen Kompetenzmodell

Zusammenfassung

Für die frühe mathematische Bildung existieren zahlreiche Konzeptionen, die unterschiedlich theoretisch fundiert sind, das Gebiet jeweils anders strukturieren und damit auch je andere Schwerpunkte setzen. Im Beitrag werden solche Konzeptionen mittels qualitativer Inhaltsanalyse untersucht, wodurch sich vier Typen herausarbeiten lassen. Die Charakterisierung und Diskussion der Typen mündet in einen Vorschlag für ein eigenes Kompetenzmodell für die frühe mathematische Bildung, das sowohl anschlussfähig ist an die Kindheitspädagogik und damit die Besonderheiten frühkindlichen (Mathematik-)Lernens als auch an den Mathematikunterricht der Grundschule. Dieses Kompetenzmodell kann pädagogischen Fachkräften eine Grundlage für die Konzeption früher mathematischer Bildung liefern.

Schlagworte

Elementarbereich, Frühe mathematische Bildung, Kompetenzmodell, Prozessbezogene Kompetenzen

Prof. Dr. Stephanie Schuler, Universität Koblenz-Landau, Campus Landau, Institut für Mathematik, Didaktik der Grundschulmathematik, Fortstr. 7, 76829 Landau
E-Mail: stephanie_schuler@uni-landau.de

Prof. Dr. Gerald Wittmann, Institut für Mathematische Bildung, Pädagogische Hochschule Freiburg, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg
E-Mail: gerald.wittmann@ph-freiburg.de

1. Einführung

Dass Kindertagesstätten in Deutschland einen Bildungsauftrag haben, ist heute unumstritten und im Gemeinsamen Rahmen der Länder verankert (JMK & KMK 2004, S. 1; vgl. auch Schuler, 2013, S. 23 ff.). Bildungsinhalte werden dort zwar angedeutet, aber nicht genauer ausgeführt, was insbesondere für das Lernen von Mathematik gilt (JMK & KMK 2004, S. 4). Diese Lücke wird auch durch die Bildungspläne der Länder nur teilweise gefüllt (vgl. Peter-Koop, 2009). Die frühe mathematische Bildung ist deshalb für pädagogische Fachkräfte in Kindertagesstätten eine kaum vorstrukturierte Domäne. Umso mehr Bedeutung besitzen Publikationen wie Handreichungen für pädagogische Fachkräfte oder Lehrbücher für Studierende, die in den letzten fünfzehn Jahren auf den Markt gekommen sind. Diese Vielzahl an auf den ersten Blick sehr verschiedenen Konzeptionen stellt für die Ausbildung von Studierenden und die Weiterbildung von Fachkräften eine enorme Herausforderung dar: Es wird nicht deutlich, welche Inhalte relevant sind und wie die frühe mathematische Bildung ausgestaltet werden soll. In diesem Beitrag werden deshalb publizierte Konzeptionen genauer betrachtet und kriteriengeleitet analysiert, um auf dieser Basis ein Kompetenzmodell für die frühe mathematische Bildung zu entwerfen. Ein solches Modell soll ein anschlussfähiges Bild früher mathematischer Bildung zeichnen und Fachkräften helfen, auf hierfür zentrale Tätigkeiten der Kinder zu fokussieren.

Deshalb werden im Folgenden relevante Hintergründe sowohl früher mathematischer Bildung als auch von Kompetenzmodellen aus verschiedenen Perspektiven betrachtet (Abschn. 2), bevor die Vorgehensweise bei der Analyse (Abschn. 3) und die Ergebnisse (Abschn. 4 und 5) berichtet werden. Abschließend werden die Ergebnisse in Bezug auf die Praxis diskutiert (Abschn. 6) und Grundzüge eines eigenen Kompetenzmodells zur Diskussion gestellt (Abschn. 7). Ein Ausblick – unter anderem auf Forschungsdesiderata – beschließt den Beitrag (Abschn. 8).

2. Bildungsbegriff und Bildungsstandards

Die Analyse von Konzeptionen früher mathematischer Bildung erfordert zunächst, den Bildungsbegriff für den Elementarbereich zu präzisieren (Abschn. 2.1), da er in der Mathematikdidaktik nicht selten ohne explizite Klärung verwendet wird. Anschließend wird an die Allgemeinbildungsdiskussion in der Mathematikdidaktik angeknüpft, die in ein heute weithin akzeptiertes prozess- und tätigkeitsorientiertes Bild von Mathematik mündet (Abschn. 2.2). Weiter werden die Bildungsstandards für den Mathematikunterricht in der Grundschule als unmittelbare Referenz für Kompetenzmodelle im Elementarbereich betrachtet (Abschn. 2.3).

2.1 Frühkindliche Bildung

Im Gemeinsamen Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen werden Bildung und Erziehung „als ein einheitliches […] Geschehen im sozialen Kontext betrachtet“ (JMK & KMK, 2004, S. 3) und nicht gegeneinander abgegrenzt. Dementsprechend wird der Bildungsbegriff nur insoweit präzisiert, als dass sowohl die aktive Rolle des Kindes im Bildungsprozess als auch die Unterstützung der Bildungsbemühungen des Kindes durch die Fachkräfte betont werden.

Auch in der Diskussion um die frühkindliche Bildung finden sich diese beiden Aspekte wieder (vgl. Stamm, 2012, S. 22 ff.; Fölling-Albers, 2013, S. 38 ff.): Der *Selbstbildungsansatz* betont die aktive Rolle des Kindes (z. B. Schäfer, 2006; Laewen, 2006), während der *ko-konstruktive Ansatz* davon ausgeht, dass sich der Bildungsprozess immer im sozialen Kontext vollzieht, an dem sowohl das Kind bzw. die Kinder als auch Erwachsene aktiv beteiligt sind, und das Kind im Austausch und der Diskussion eigene Ideen (weiter)entwickelt (z.B. Fthenakis, 2002). Ansätze im Sinne eines „*Sowohl-als-auch“* (Bezeichnung: Stamm, 2012, S. 24; Hervorh. d. Verf.) sehen Selbstbildungsaktivitäten des Kindes und den sozialen Kontext als gleichermaßen bedeutsam an (z.B. Roßbach, 2004; Liegle, 2011). Daneben benennt Stamm (2012, S. 23) auch einen *auf Befähigung zielenden Ansatz*: Um der besonderen und prekären Situation benachteiligter Kinder gerecht zu werden, sollen Fachkräfte ihr Augenmerk auch darauf richten, wie sie alle Kinder dazu befähigen können, ihr Selbstbildungspotenzial sowie die vorbereiteten Spiel- und Lernumgebungen zu nutzen. Hieraus ergibt sich folgendes Bildungsverständnis:

> „Versteht man unter frühkindlicher Bildung einen Prozess, in dem sich das Kind ein Bild von der Welt macht und seinen Erfahrungen Sinn verleiht, so muss der Begriff folglich sowohl selbstbildende als auch ko-konstruktive und befähigende Elemente seitens der Erwachsenen beinhalten.“ (Stamm & Edelmann, 2013, S. 14)

Gleichzeitig wird allerdings bezüglich des Bildungsbegriffs eine „oftmals deutliche Diskrepanz zwischen diesem Verständnis und seiner tatsächlichen Verwendung“ (ebd., S. 14) konstatiert. Nicht alle Publikationen entsprechen obigem Bildungsverständnis, auch wenn die jeweiligen Autorinnen und Autoren sie unter frühe mathematische Bildung subsumieren. Insbesondere ist zu unterscheiden zwischen früher mathematischer Bildung und mathematischer Frühförderung, wie sie etwa durch Trainingsprogramme erfolgt, die auf Vermittlung zielen und ausschließlich den Erwerb mathematischer Vorläuferfertigkeiten in einem speziellen Fördersetting umfassen, um allen Kindern erfolgreiche schulische Lernprozesse zu ermöglichen (s. Abschn. 3).

2.2 Mathematische Allgemeinbildung und Bild von Mathematik

Die Diskussion um einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht wurde von Winter (1975) angestoßen und in den 1990er Jahren wieder aufgegriffen (Winter, 1995; Heymann, 1996). Auch wenn der Elementarbereich damals nicht Gegenstand der Überlegungen war, sind einige Aspekte für die frühe mathematische Bildung relevant (vgl. Wittmann & Schuler, 2016).

Im Konzept einer mathematischen Allgemeinbildung nach Heymann (1996, S. 277 ff.), das mit Blick auf die Sekundarstufe formuliert wurde, werden nicht nur Lerninhalte betrachtet, sondern auch „kulturelle Kohärenz“ (ebd., S. 154), „Weltorientierung“ (ebd., S. 183) sowie „Denken, Verstehen und kritischer Vernunftgebrauch“ (ebd., S. 215) als zentrale Aspekte eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts beschrieben. Darüber hinaus nehmen die Selbsttätigkeit der Lernenden, der Austausch untereinander und mit der Lehrkraft eine wichtige Rolle ein. Damit erscheinen die Art und Weise, wie Inhalte behandelt werden, sowie die Unterrichtskultur für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht als ebenso bedeutsam wie die Inhalte selbst.

In Reaktion auf die von Heymann (1996) ausgelöste Diskussion[1] formuliert Winter (1995) drei mathematische Grunderfahrungen als Ziele eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts, von denen zwei auch für den Elementarbereich relevant sind. Die erste Grunderfahrung

> „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (ebd., S. 37)

kann als ein Anknüpfen an die Lebenswelt von Kindern gedeutet werden – eine deutliche Parallele zum oben skizzierten elementarpädagogischen Bildungsbegriff. Deutlich wird hierbei, dass mathematische Erfahrungen sich von Alltagserfahrungen abheben. Die dritte Grunderfahrung

> „in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben“ (ebd., S. 37)

betont, dass mathematische Allgemeinbildung immer auch auf eine Förderung der Problemlösekompetenz zielt, auch wenn hier der Transfer über die Mathematik hinaus sehr weitreichend formuliert wird. Ein Nachsatz zu den drei Grunderfahrungen besagt explizit, dass mathematische Allgemeinbildung stets nur über Tätigkeiten der Lernenden zu erlangen ist:

> „Das Wort *Erfahrung* soll zum Ausdruck bringen, dass das Lernen von Mathematik weit mehr sein muss als eine Entgegennahme und Abspeicherung von Information, dass Mathematik erlebt (möglicherweise auch erlitten) werden muss.“ (ebd., S. 37 f.; Hervorh. i. Orig.)

Diese Perspektive steht in der Tradition einer Gegenbewegung zur sog. Neuen Mathematik, die Mengenlehre und Logik in den Mittelpunkt stellte und auch für den Elementarbereich ausgearbeitet wurde (exemplarisch: Glaus & Senft, 1969; Neunzig, 1972). Die primäre Kritik an der Neuen Mathematik lautet, dass Mathematik als Produkt, als etwas Fertiges und Abgeschlossenes gesehen wird. Gegenentwürfe heben deshalb den Prozesscharakter von Mathematik hervor:

---

[1] Die Habilitationsschrift von Hans Werner Heymann wurde bereits 1995 veröffentlicht; die oben zitierte Buchfassung erschien dann 1996.

> „Mathematik ist keine Menge an Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung“ (Freudenthal, 1982, S. 140).

So wird der Neuen Mathematik als „Fertigprodukt“ (Freudenthal, 1973, S. 100) die Auffassung von „Mathematik als einer Tätigkeit“ (ebd., S. 115) gegenübergestellt und die Bedeutung von „Nacherfindung und Entdeckung“ (ebd., S. 116). betont. In der Folge werden Ansätze wie das entdeckende Lernen (Winter, 1989) oder das genetische Prinzip (Wittmann, 1974, S. 97 f.) für den Mathematikunterricht weiterentwickelt. Außerdem etabliert sich in der Mathematikdidaktik ein Bild von Mathematik, das vom Arbeitsprozess der wissenschaftlichen Mathematik ausgeht (vgl. Schoenfeld, 1994) und das Problemlösen sowie das Kommunizieren und Argumentieren als zentrale und charakteristische Tätigkeiten betont.

Für die Mathematik charakteristische Tätigkeiten bilden auch die zentrale Grundlage des Kompetenzmodells von PISA 2000. In der Rückschau verweist Niss (2015, S. 36 f.), einer der Mitautoren des Modells, darauf, dass es zahlreiche Ansätze gibt, die in Mathematik mehr sehen als Faktenwissen und Verfahren und deshalb mathematische Tätigkeiten in den Mittelpunkt stellen. Als Antwort auf die Frage, was die unterschiedlichen mathematischen Teilgebiete gemeinsam haben, greifen weder bestimmte Inhalte (hier wäre mit den natürlichen Zahlen der gemeinsame Kern zu gering) noch die sehr grundlegende Charakterisierung von Mathematik als Wissenschaft von den Mustern, weil diese zu allgemein und auch zu wenig mathematikspezifisch wäre. Stattdessen erweisen sich für die Mathematik charakteristische Tätigkeiten als tragfähige Grundlage eines Kompetenzmodells (ebd., S. 39 ff.).

2.3 Bildungsstandards

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2004a) unterscheiden *inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen*, die durch fünf *Leitideen* gegliedert werden (Zahlen und Operationen; Raum und Form; Muster und Strukturen; Größen und Messen; Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit), und fünf *allgemeine mathematische Kompetenzen* (Problemlösen; Kommunizieren; Argumentieren; Modellieren; Darstellen).

> „Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen verdeutlichen, dass die Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen ein wesentlicher Teil der Entwicklung mathematischer Grundbildung ist. Deren Entwicklung hängt nicht nur davon ab, *welche* Inhalte unterrichtet wurden, sondern in mindestens gleichem Maße davon, *wie* sie unterrichtet wurden“ (KMK, 2004a, S. 6; Hervorh. i. Orig.).

Des Weiteren wird die Bedeutung allgemeiner mathematischer Kompetenzen für den Lernprozess und die Unterrichtsgestaltung hervorgehoben.

> „Allgemeine mathematische Kompetenzen zeigen sich in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik und auf die gleiche Weise, in der tätigen Auseinandersetzung, werden sie erworben. Die angestrebten Formen der Nutzung von Mathematik müssen daher auch regelmäßig genutzte Formen des Mathematiklernens sein.“ (KMK, 2004a, S. 7).

Das Kompetenzmodell der Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004a) umfasst mit inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen zwei *Kompetenzdimensionen* Kasten 1). In neueren Bildungsplänen mancher Länder wird diese Zweidimensionalität durch entsprechende graphische Darstellungen zusätzlich betont (z. B. in Rheinland-Pfalz MBWWK, 2014; in Baden-Württemberg MKJS, 2016). Dieses Kompetenzmodell findet sich mit entsprechenden Modifizierungen und Erweiterungen auch in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss (KMK, 2004b), den Mittleren Schulabschluss (KMK, 2003) und die Allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012), was den Aspekt der vertikalen Vernetzung, aber auch der Anreicherung und den altersspezifischen Zuschnitt über die Zeit hinweg betont.

In den Bildungsstandards für den Primarbereich werden *inhaltsbezogene Kompetenzen* durch *Leitideen* gegliedert:

- *Zahlen und Operationen*: Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen; Rechenoperationen verstehen und beherrschen; in Kontexten rechnen.
- *Raum und Form*: Sich im Raum orientieren; geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen; einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen; Flächen-und Rauminhalte vergleichen und messen.

- *Muster und Strukturen*: Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen; funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen.
- *Größen und Messen*: Größenvorstellungen besitzen; mit Größen in Sachsituationen umgehen.
- *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*: Daten erfassen und darstellen; Wahrscheinlichkeit von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen.

Weiter werden fünf *allgemeine mathematische Kompetenzen* ausgewiesen:

- *Problemlösen*: mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden; Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren); Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.
- *Kommunizieren*: eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren; mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden; Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.
- *Argumentieren*: mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen; mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln; Begründungen suchen und nachvollziehen.
- *Modellieren*: Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen; Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen; zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren.
- *Darstellen*: für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen; eine Darstellung in eine andere übertragen; Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten.

Kasten 1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004a, S. 7 ff.)

Als einer der Vorläufer der deutschen Bildungsstandards gelten die Standards des National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989; 2000) in den USA, die im Zuge von Reformbemühungen einen zeitgemäßen Mathematikunterricht beschreiben wollen.

> „This vision addresses what mathematics is, what it means to know and do mathematics, what teachers should do when they teach mathematics, and what children should do when they learn mathematics." (NCTM, 1989, S. 16).

Die NCTM-Standards beinhalten in beiden Fassungen sowohl inhaltsbezogene als auch allgemeine bzw. prozessbezogene mathematische Kompetenzen („main content areas", „process ideas"). Diese werden dort allerdings in einer Reihe nacheinander gelistet, anders als in den deutschen Bildungsstandards, was die Zweidimensionalität des Kompetenzmodells weniger explizit macht.

3. Fragestellung und Vorgehensweise

Unabhängig davon, aus welcher Perspektive man sich der frühen mathematischen Bildung nähert, spielen die Bildungsaktivitäten des Kindes, konkret mathematische Tätigkeiten, eine wesentliche Rolle. Offen ist nun, in welcher Weise diese in den verschiedenen Konzeptionen früher mathematischer Bildung verankert sind. Eine *Konzeption früher mathematischer Bildung* in diesem Sinne ist stets programmatisch, explizit begründet, besitzt einen umfassenden Geltungsanspruch für die frühe mathematische Bildung und entspricht dem in Abschnitt 2.1 dargestellten Bildungsbegriff. Sie kann als Kompetenzmodell formuliert sein, aber auch in anderer Weise Tätigkeiten von Kindern in strukturierter Weise beschreiben. Deshalb werden in den Abschnitten 3 bis 5 die beiden Termini „Tätigkeiten" und „Kompetenzen" wie in den jeweils referierten Quellen verwendet.

Bei der Analyse von Konzeptionen früher mathematischer Bildung sind zwei Fragen leitend:

(1) Wie sind die Konzeptionen früher mathematischer Bildung formal strukturiert?

(2) In welcher Weise werden mathematische Tätigkeiten konzeptualisiert?

Analysiert wurden deutschsprachige Publikationen, die eine Konzeption früher mathematischer Bildung im obigen Sinne beinhalten:

- Lehrbücher, die sich an Studierende wenden, oder einschlägige Kapitel in einem solchen Lehrbuch (Kaufmann, 2010; Lorenz, 2012; Rathgeb-Schnierer, 2012; Benz, Peter-Koop & Grüßing, 2015),
- Handbücher, die an pädagogische Fachkräfte im Elementarbereich adressiert sind (Benz, 2010; Fthenakis, Schmidt, Daut, Eitel & Wendell, 2009; Fuchs, 2015; Hoenisch & Niggemeyer, 2009; Lee, 2010; Müller & Wittmann, 2002; 2006; Royar & Streit, 2010; Wittmann & Müller, 2009; Wittmann, 2016),
- einschlägige Beiträge in Sammelbänden (Wittmann, 2003; 2004; Rathgeb-Schnierer, 2008; Steinweg, 2008),
- ein Teilkapitel eines Projektberichts (Rathgeb-Schnierer, 2015)
- sowie eine als Expertise eingeordnete Veröffentlichung (Benz, Grüßing, Lorenz, Reiss, Selter & Wollring, 2017).

Diese Einteilung ist keineswegs trennscharf, sie soll vielmehr den unterschiedlichen Charakter der Publikationen verdeutlichen. Weiter sind die Konzeptionen früher mathematischer Bildung in den betrachteten Publikationen unterschiedlich konkret – das Spektrum reicht von eher kurzen, thesenartigen Skizzierungen eines Konzepts bis hin zu sehr detaillierten und reich bebilderten Anleitungen für Fachkräfte. Eine Recherche unter www.zentralblatt-math.org/matheduc/ und www.fis-bildung.de sicherte ab, dass auch wirklich alle relevanten Publikationen erfasst wurden.[2]

[2] Letzter Abgleich am 25.11.2019. Unter www.zentralblatt-math.org/matheduc/ wurden folgende Klassifikationen durchsucht: A21 (Recreational mathematics, kindergarten and preschool education), C31 (Cognitive processes. Learning, learning theories, kindergarten and preschool education), D11 (Comprehensive works and surveys on mathematics instruction in general and at different school levels and types. Comparative studies on mathematics education in different countries, kindergarten and preschool education), D31 (Goals of mathematics teaching. Curriculum development, kindergarten and preschool education), D81 (Teaching units, draft lessons and master lessons, kindergarten and preschool education), U31 (Teacher manuals and planning aids, kindergarten and preschool education), U61 (Manipulative materials and their use in the classroom,

Nicht in die Untersuchung einbezogen wurden Publikationen, die keine Konzeption in obigem Sinne beschreiben: so Förderprogramme, die gemäß einem kompensatorischen Ansatz primär auf den Zahlbegriff zielen (z. B. Krajewski, Nieding & Schneider, 2007; Gerlach, Fritz & Leutner, 2013), Programme, die sehr eng geführt sind und ausschließlich inhaltsbezogene Kompetenzen ansprechen (Preiß, 2004/05; Friedrich, de Galgóczy & Schindelhauer, 2011), und Publikationen, die zwar mathematische Lernangebote für den Kindergarten beschreiben, aber diese kaum begründen und strukturieren (z. B. Bostelmann, 2009; Kornmann, 2010; Koch, Schulz, & Jungmann 2015; Taylor; 2006).

Die Analyse der Publikationen erfolgte in Anlehnung an die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2015). Durchgeführt wurden eine strukturierende und eine zusammenfassende Analyse (ebd., S. 68), da Kategorien sowohl deduktiv als auch induktiv gebildet wurden. Vorab deduktiv hergeleitete Kategorien sind beispielsweise die in den Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004a) verwendete Terminologie sowie Abweichungen davon. Aus den analysierten Publikationen induktiv gewonnene Kategorien erfassen beispielsweise die Anzahl der Kompetenzdimensionen in den untersuchten Publikationen, aber auch für die Mathematik im Primarbereich als typisch erachtete Tätigkeiten wie Klassifizieren und Seriieren, und den Begründungshorizont dieser Tätigkeiten.

Im zweiten Schritt der Analyse, der theoretisch geleiteten und empirisch begründeten Typenbildung nach Kelle und Kluge (2010), wurden für die einzelnen Kategorien Vergleichsdimensionen erarbeitet und die Publikationen in der Folge aufgrund ähnlicher Merkmale gruppiert (ebd., S. 96 ff.):

- Anzahl der Tätigkeits- bzw. Kompetenzdimensionen: eine, zwei oder drei;
- verwendete Terminologie: enge Anlehnung an die Terminologie der Bildungsstandards für den Primarbereich, eigenständige Bezeichnungen für den Elementarbereich oder Mischformen;

---

kindergarten and preschool education). Unter www.fis-bildung.de wurde aufgrund folgender Schlagworte gesucht: „frühkindliche Bildung“ + „Mathematik“ und „Elementarbereich“ + „Mathematik“.

- Begründung bzw. theoretische Anbindung der genannten Tätigkeiten bzw. Kompetenzen: überwiegend vom Kind aus (für diese Altersstufe typische kindliche Tätigkeiten) oder stärker vom Fach aus (für die Mathematik typische Tätigkeiten).

4. Typen von Konzeptionen früher mathematischer Bildung

Der Analyseprozess mündet in vier Typen von Konzeptionen: (1) Eine weitgehende Übernahme der allgemeinen mathematischen Kompetenzen und der Leitideen aus den Bildungsstandards für den Primarbereich, (2) „Mathematische Denk- und Handlungsweisen“ als eigenständige und zusätzliche Kompetenzdimension, womit zwei unterschiedliche inhaltsübergreifende Kompetenzdimensionen entstehen, (3) „Sortieren und Klassifizieren“ als Inhaltsbereich, (4) Mathematik als Wissenschaft von den Mustern als übergreifendes fachliches Grundkonzept. Diese vier Typen werden im Folgenden durch Realtypen, d. h. durch eine Konzeption, die den jeweiligen Typ charakterisiert, beschrieben. Eine Zuordnung weiterer Konzeptionen zu den vier Typen findet sich in Abschnitt 5.

4.1 Typ 1: Weitgehende Übernahme aus den Bildungsstandards für den Primarbereich

Der erste Typ (Benz, Peter-Koop & Grüßing, 2015, S. 321 ff.) übernimmt sowohl die Struktur als auch die Terminologie aus den Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004a) weitgehend, was allerdings schwach gefüllte Kategorien und Umdeutungen mit sich bringt. So werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen wie in den Bildungsstandards formuliert, jedoch zum Teil deutlich andere Tätigkeiten darunter subsumiert.

- In Bezug auf das Lösen mathematischer Probleme wird betont, dass es bei jungen Kindern häufig durch unsystematisches Probieren erfolgt, so dass die strategische Komponente des Problemlösens weitgehend fehlt (ebd., S. 324 ff.). Problemlösen wird also sehr weit gefasst und steht letztlich für Kreativsein und das Entdecken neuer Lösungswege.
- Unter mathematischem Darstellen wird das Übersetzen zwischen und innerhalb der drei Brunerschen Repräsentationsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch) verstanden (ebd., S. 332 ff.). Für das frühe

Mathematiklernen werden jedoch nicht alle Übersetzungen als gleichgewichtig betrachtet. So spielt die Übersetzung innerhalb und ausgehend von der symbolischen Darstellungsform im Elementarbereich eine untergeordnete Rolle und wird eher dem schulischen Bereich zugeordnet. Von Bedeutung sind also primär konkrete Handlungen mit Material (enaktive Darstellungen), ikonische Darstellungen sowie sprachliche Beschreibungen. Als für den Kindergarten relevant erachtet werden insbesondere bildliche Darstellungen konkreter Objekte (z. B. Bauwerke), die die Realität oftmals reduziert darstellen und damit einen ersten Abstraktionsprozess darstellen.

- Das mathematische Modellieren wird als einzige der fünf aufgeführten allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht durch ein Beispiel aus dem Kindergartenalltag konkretisiert. Hier erfolgen die größten Umdeutungen: Da Modellieren im Vorschulalter auf die mathematische Symbolsprache verzichten muss, wird von „umgekehrtem“ Modellieren gesprochen (ebd., S. 335). Damit ist gemeint, dass mathematische Sachverhalte wie beispielsweise die Additionsaufgabe 3 + 4 durch eine Handlung oder eine sprachliche Einkleidung veranschaulicht werden (in der mathematikdidaktischen Terminologie üblich wäre hierfür die Bezeichnung als Interpretieren der Aufgabe). Diese Umdeutung des Modellierens bewirkt, dass es sich kaum vom Darstellen unterscheidet.

Eine ähnliche Problematik tritt bezüglich der inhaltsbezogenen Kompetenzen auf. Zwar beschreiben Benz et al. (2015) zu allen fünf Leitideen Lernangebote für den Kindergarten, füllen aber bis auf die Leitideen „Zahlen und Operationen“ und „Raum und Form“ nicht alle so umfassend, dass sie tatsächlich die Funktion von Leitideen übernehmen können. Zur Leitidee „Größen und Messen“ werden Vergleichserfahrungen und das Kennenlernen von Messwerkzeugen zu den Größenbereichen „Längen“ und „Gewichte“ beschrieben. Messerfahrungen sind hingegen aufgrund der notwendigen Zahlenräume nur begrenzt möglich. Auch wird deutlich gemacht, dass zu den anderen Größenbereichen im Kindergarten nur eingeschränkt Vergleichs- und Messerfahrungen gemacht werden können (ebd., S. 253 ff.). So beschränken sich die Erfahrungen zu „Zeit“ auf das bewusste Erleben der Jahreszeiten, der Monate etc. und das Ablesen einfacher Zeitpunkte am Kalender und der Uhr. Die Bestimmung von Zeitspannen spielt noch keine Rolle. Die Zählgröße „Geldwerte“ fehlt. Vergleichbares gilt für die Leitidee „Daten, Häufigkeit und

Wahrscheinlichkeit“, die auch dem Seitenumfang nach deutlich gegenüber den bisher genannten Leitideen abfällt. Auch die Sonderrolle der Leitidee „Muster und Strukturen“ wird an den angeführten Lernangeboten deutlich. Als Lernangebote werden das Fortsetzen von geometrischen Musterfolgen, das auch bereits unter der Leitidee Raum und Form vorgeschlagen wird (ebd., S. 200, 295 ff.), und das Strukturieren von Mengen, das auch der Leitidee „Zahlen und Operationen“ zugeordnet werden könnte, beschrieben (ebd., S. 298).

4.2 Typ 2: „Mathematische Denk- und Handlungsweisen“ als eigenständige Kompetenzdimension

Den Ausgangspunkt für den zweiten Typ (Rathgeb-Schnierer (2012; 2015) bilden die Beobachtung kindlicher Aktivitäten in alltäglichen Situationen sowie umfassende Materialanalysen. Hieraus werden „grundlegende mathematische Denk- und Handlungsweisen“ (Rathgeb-Schnierer, 2012, S. 52) abgeleitet, die zwei Gemeinsamkeiten aufweisen: Sie

- sind wie die allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Bildungsstandards (KMK, 2004a) unabhängig von bestimmten mathematischen Inhalten, also inhaltsübergreifend und
- „haben dasselbe grundlegende Ziel, nämlich eine ungeordnete, komplexe Ausgangssituation überschaubar zu machen“ (ebd., S. 52), und zwar durch die „Herstellung von Ordnung“ (ebd., S. 53).

Für den Elementarbereich werden in der Folge drei mathematische Denk- und Handlungsweisen genannt (ebd., S. 52 ff.):

- das Sortieren oder Klassifizieren im Sinne des konkreten oder auch mentalen Zusammenfassens nach einem oder mehreren Merkmalen,
- das Ordnen oder Seriieren im Sinne des konkreten oder auch mentalen Schaffens von Rangordnungen nach einem Ordnungsmerkmal und
- das Strukturieren im Sinne des Findens, Erfindens, Fortsetzens und Nutzens von Mustern.

Die Explizierung und Konkretisierung orientieren sich dabei an kindergartentypischen Gegebenheiten und dort bereits vorhandenen Materialien. Typische Lernangebote beziehen sich beispielsweise auf Perlen, Bauklötze oder gängige, teilweise auch leicht abgewandelte Regelspiele

(z. B. Rathgeb-Schnierer, 2008, 2012; Stemmer, 2015). Es zeigt sich eine klare Fokussierung auf „Zahlen und Operationen“ sowie „Raum und Form“, unter Verweis auf Wittmann und Müller (2009), die für den frühkindlichen Bereich die Förderung der numerischen Bewusstheit und der Formbewusstheit als zentral hervorheben (vgl. Abschn. 4.4). „Größen und Messen“ sowie „Daten und Zufall“ werden zwar aufgeführt, aber inhaltlich nicht weiter ausgestaltet (Rathgeb-Schnierer, 2015, S. 17 ff.). Generell spricht Rathgeb-Schnierer (2015, S. 14) von „Inhaltsbereichen“, nicht von Leitideen.

Ein Inhaltsbereich „Muster und Strukturen“, in Anlehnung an die entsprechende Leitidee der Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004a), taucht im Modell von Rathgeb-Schnierer (2015, S. 11) nicht explizit auf. Wenn man aber die Beschreibung der drei mathematischen Denk- und Handlungsweisen Sortieren, Seriieren und Strukturieren sowie die gegebenen Beispiele analysiert, lässt sich insbesondere das Strukturieren als themenunspezifische Tätigkeit unter die Leitidee „Muster und Strukturen“ subsumieren, wohingegen Sortieren und Seriieren in Anlehnung an Piaget auch als pränumerische Tätigkeiten gesehen werden können.

Weiter führt Rathgeb-Schnierer (2015, S. 11 f.) allgemeine mathematische Kompetenzen an, die ebenfalls inhaltsübergreifend sind: Probleme lösen, kommunizieren, Ideen darstellen, argumentieren. Diese werden dezidiert von den Formulierungen in den Bildungsstandards abgesetzt. So wird das Modellieren nicht aufgeführt, weil es im Elementarbereich noch keine Rolle spielt (ebd., S. 11).

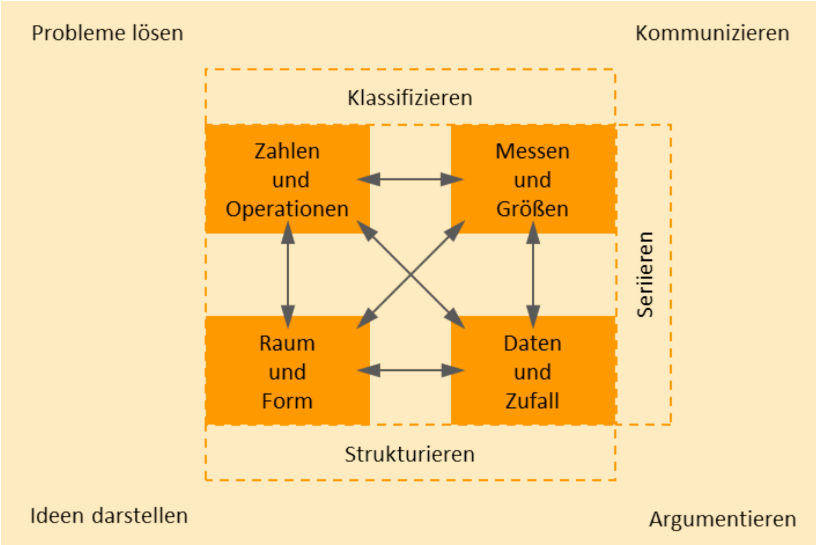

Abbildung 1: Konzeption nach Rathgeb-Schnierer (2015, S. 11)

Insgesamt umfasst die Konzeption von Rathgeb-Schnierer (2015) damit drei Dimensionen (Abb. 1): Zwischen Inhaltsbereichen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen wird eine dritte Dimension eingezogen, die mit Klassifizieren, Seriieren und Strukturieren mathematische Denk- und Handlungsweisen umfasst und wie die allgemeinen mathematischen Kompetenzen inhaltsübergreifend und „Kernelemente einer mathematischen Tätigkeit" (Rathgeb-Schnierer 2015, S. 12) sind. Diese dritte Dimension stellt allerdings eine formale Abweichung von den Bildungsstandards für den Primarbereich dar und kann auch inhaltlich nicht klar von den anderen beiden Dimensionen getrennt werden.

4.3 Typ 3: „Sortieren und Klassifizieren" als Inhaltsbereich

Der dritte Typ („Mathekings", Hoenisch & Niggemeyer, 2007) betont mit dem Bild der „Brücke" (ebd., S. 13), die zwischen dem Denken der Kinder und der Mathematik gebaut werden muss, die Orientierung an kindlichen Tätigkeiten, ebenso wie mit den ausgewählten Materialien und den konkret beschriebenen mathematischen Tätigkeiten, die sich eng an den Kindergartenalltag anlehnen. Die Konzeption ist eindimensional und listet alle Kategorien gleichwertig als sechs sogenannte „Pfeiler" (ebd., S.

33 ff.), die für „mathematische Konzepte“ (ebd., S. 29) stehen. Zwei der aufgeführten Pfeiler werden explizit über Tätigkeiten bezeichnet: „Sortieren und Klassifizieren“ sowie „Wiegen, Messen und Vergleichen“. Die anderen vier haben eher den Charakter von Inhalten: „das Muster“, „die Zahl“, „Raum und Geometrie“ sowie „grafische Darstellung und Statistik“. Die Konzeption von Hoenisch und Niggemeyer (2007) zeigt eine sprachliche Nähe zu den Leitideen der Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004a), enthält anders als diese aber keine inhaltsübergreifenden Tätigkeiten. Die vermeintliche Analogie zu den NCTM-Standards ist nur oberflächlich, da diese zwar inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen nacheinander listen, aber klar zwischen beiden inhaltsbezogenen und inhaltsübergreifenden Kompetenzen differenzieren. Von Typ 2 unterscheidet sich Typ 3 dadurch, dass er Sortieren und Klassifizieren bezüglich der Gliederung und der Beschreibung als eigenständig behandelt, während Typ 2 (Rathgeb-Schnierer, 2012; 2015) Sortieren und Klassifizieren als für die Mathematik typische und damit inhaltsübergreifende mathematische Denk- und Handlungsweisen verortet.

4.4 Typ 4: Mathematik als Wissenschaft von den Mustern

Der vierte Typ gründet auf die Auffassung von „Mathematik als Wissenschaft von den (schönen) Mustern“ (Wittmann, 2004, S. 51 f.; in Anlehnung an Devlin, 1997). Mathematische Muster dürfen dabei nicht als etwas fest Gegebenes angesehen werden, das man nur betrachten und reproduzieren kann. Konstitutiv für den Musterbegriff bei Wittmann (2003, S. 26) ist vielmehr, dass „man sie erforschen, fortsetzen, ausgestalten und selbst erzeugen kann“. Hinter den Mustern stehen also die damit verbundenen Tätigkeiten. Geeignet für die mathematische Bildung im Kindergarten ist die Erforschung und Fortsetzung einfach zugänglicher arithmetischer und geometrischer Muster (ebd., S. 26).

Betont wird zudem der Verzicht auf pseudo-kindgerechte Einkleidungen, die als unnötig erachtet werden:

> „Da Kinder von klein auf ein ursprüngliches Verhältnis zu Zahlen und Formen haben, kann die Motivation für mathematische Aktivitäten von Anfang an aus dem Fach selbst geschöpft werden.“ (Wittmann, 2004, S. 52).

Inhaltlich zeichnet sich diese Konzeption durch eine Konzentration auf „Zahlen“ und „Formen“ aus (Müller & Wittmann, 2002; 2006; Wittmann

& Müller, 2009; Wittmann, 2016), und sie ist in hohem Maße anschlussfähig an den Mathematikunterricht der Grundschule, da dieselben Darstellungen und Materialien verwendet werden. Während „Muster und Strukturen“ in den Bildungsstandards für den Primarbereich als eigenständige inhaltsbezogene Leitidee ausgewiesen ist, handelt es sich im Verständnis von Wittmann und Müller (2008) um ein übergreifendes fachliches Grundkonzept, bei dem es um die dahinterstehenden mathematischen Tätigkeiten wie Ordnen, Strukturieren, Herstellen von Beziehungen, Erkennen, Beschreiben und Begründen von Zusammenhängen, Auffälligkeiten, Abhängigkeiten oder Regelmäßigkeiten geht. In den Umsetzungen für die Praxis und den zugehörigen Anleitungen (Müller & Wittmann, 2002; 2006; Wittmann & Müller, 2009) zeigt sich die Bedeutung dieser Tätigkeiten jedoch nicht mehr so deutlich; sie werden weder durch Beispiele konkretisiert noch wird ihre Anregung über eine Lernbegleitung thematisiert. Die Umsetzungen für die Praxis bleiben diesbezüglich hinter den konzeptionellen Ausführungen zurück.

5. Einordnung weiterer Konzeptionen

Einige der weiteren Konzeptionen lassen sich eindeutig einem Typ zuordnen, während andere eher als Mischformen gelten müssen.

Die Konzeptionen von Kaufmann (2010), Lorenz (2012) und Fuchs (2015) lassen sich insofern Typ 1 zuordnen, als sie die inhaltsbezogenen Kompetenzen gemäß den fünf Leitideen in Anlehnung an die Grundschulbildungsstandards für den Elementarbereich formulieren, mit unterschiedlichen Abweichungen. Allen drei Konzeptionen ist gemeinsam, dass das Modellieren konsequenterweise nicht erscheint, womit Umdeutungen vermieden werden, und zu „Größen und Messen“ sowie „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ nur wenige Beispiele gegeben werden. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden in allen dreien angedeutet oder lassen sich implizit erkennen, werden aber nicht weiter ausgeführt oder konkretisiert.

Eine Mischform aus Typ 1 und Typ 2 bildet das Kompetenzmodell von Steinweg (2008), das explizit als solches bezeichnet wird. Es weist sowohl in seiner Zweidimensionalität als auch in seinem Verständnis der beiden Kompetenzdimensionen (Steinweg, 2008, S. 146 f.) eine große Ähnlichkeit zu den Bildungsstandards für den Primarbereich auf. Inhaltsbezogene Kompetenzen werden gegliedert in „Zahl und Struktur“, „Raum und

Form“, „Daten und Zufall“ sowie „Maße und Zeit“ (ebd., S. 147), prozessbezogene Kompetenzen in „ordnen & Muster nutzen“, „kreativ sein & Probleme lösen“, „kommunizieren & argumentieren“, „begründen & prüfen“ (ebd., S. 147), die unter der „Idee des mathematischen Denkens“ zusammengefasst werden (ebd., S. 146). Das Kompetenzmodell unterscheidet sich aber in einigen Aspekten stärker von den Bildungsstandards, als auf den ersten Blick ersichtlich ist, und ist in diesen eigenständigen Formulierungen Typ 2 nahe. Besonders deutlich wird dies an der Leitidee „Muster und Strukturen“ der Bildungsstandards: Diese wird einerseits in den mathematischen Denkweisen aufgenommen („Muster nutzen“; ebd., S. 147), also inhaltsübergreifend, andererseits aber als primär relevant für den Erwerb des Zahlbegriffs gesehen („Zahl und Struktur“; ebd., S. 147 ff.).

Die Konzeption „MATHElino“ (Royar & Streit, 2010) ist nahe bei Typ 2 zu verorten. Die Inhalte werden erfasst durch „mathematische Kernbereiche“ (ebd., S. 22), überschrieben mit „Zahl“, „Maß“ und „Raum und Form“ (ebd., S. 22), explizit angelehnt an die Leitideen der Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004a). Zuvor beschreiben Royar und Streit (2010, S. 12) das „Ordnen als Grundlage mathematischen Denkens“ (ebd., S. 12)“[3], wobei der Zusammenhang zu den mathematischen Kernbereichen vage bleibt. Unter „Ordnen“ wiederum werden „Klassifikation“, „Seriation“ und „Teil-Ganzes-Beziehung“ (ebd., S. 16 ff.) subsumiert, mit der Gemeinsamkeit, dass hierdurch jeweils Beziehungen zwischen Objekten hergestellt werden (ebd., S. 14). Wie auch die Beispiele zeigen, werden hierbei letztlich Tätigkeiten von Kindern beschrieben, auch wenn die Beziehung von Denken und Tätigkeiten nicht explizit geklärt wird. Diese Tätigkeiten bereiten einerseits den mathematischen Anfangsunterricht vor, so die für den Zahlbegriffserwerb wichtige Teil-Ganzes-Beziehung, greifen andererseits aber auch typische Tätigkeiten von Kindern im Vorschulalter auf. Kindergartenspezifisch sind insbesondere die eingesetzten Materialien. Mit Typ 2 (Rathgeb-Schnierer, 2012;

[3] Royar und Streit (2010, S. 12 ff.) verwenden „Ordnen“ allerdings in einer eher weiten, alltagsweltlichen Bedeutung (im Sinne von Ordnung schaffen), und nicht der engeren, in der Mathematik üblichen Bedeutung (Ordnen gemäß einer Ordnungsrelation).

2015) verbindet „MATHElino“ die Betonung von Klassifizieren und Serieren als grundlegende mathematische Tätigkeiten von Kindern im Vorschulalter, auch wenn die Einbettung in die Gesamtkonzeption jeweils unterschiedlich ist.

Typ 3 zuzuordnen ist die Konzeption von Fthenakis, Schmitt, Daut, Eitel und Wendell (2009). Dort werden „Sortieren und Klassifizieren“ sowie „Muster und Reihenfolgen“ neben „Zeit“, „Raum und Form“ sowie „Mengen, Zahlen, Ziffern“ als „inhaltliche Bereiche der frühen mathematischen Bildung“ betrachtet (ebd., S. 14). Den Ausgangspunkt der im Anschluss beschriebenen mathematischen Projekte für den Kindergarten bilden, wie für Typ 3 charakteristisch, Aktivitäten der Kinder und kindergartentypische Materialien.

Wie Typ 4 berufen sich auch „Minis entdecken Mathematik“ (Benz, 2010) und „Gleiches Material in großer Menge“ (Lee, 2010) auf die zentrale Bedeutung von Mustern in der Mathematik. Allerdings zielt Lee (2010) weniger auf mathematische Inhalte, denn auf die Kreativität der Kinder, die sich im Bilden von Mustern äußert.

6. Diskussion der Konzeptionen

Wenngleich alle analysierten Konzeptionen auf Tätigkeiten der Kinder fokussieren, unterscheiden sie sich schon terminologisch. Es finden sich „Inhaltsbereiche“ (Fuchs, 2015; Rathgeb-Schnierer, 2012; 2015), „Bereiche“ (Benz et al., 2015; Fthenakis et al., 2009), „Kernbereiche“ (Royar & Streit, 2010), „Bereiche und Inhalte“ (Kaufmann, 2010) oder „Pfeiler“ (Hoenisch & Niggemeyer, 2007), während der Terminus „Leitidee“ der Bildungsstandards von keiner der Konzeptionen verwendet wird.

Auch im Hinblick auf die Kompetenzdimensionen ergeben sich deutliche Abweichungen. Die Übernahme des zweidimensionalen Kompetenzmodells aus den Bildungsstandards für den Primarbereich entsprechend Typ 1 wird wie folgt begründet:

> „Nach Auffassung der Expertengruppe besteht kein plausibler Grund dafür, dass die Zieldimensionen mathematischen Lernens im Alter von 6 bis 18 Jahren grundsätzlich andere sein sollten als die im Elementarbereich. Daher werden diese [...] auch für Kinder im Alter von

> 3 bis 6 Jahren herangezogen und – wo sinnvoll – in geeigneter Weise modifiziert.“ (Selter & Wollring, 2017, S. 61)

Dieses Argument ist zwar prinzipiell nachvollziehbar, jedoch angesichts der bislang vorliegenden Umsetzungen fraglich, da weder bei inhaltsbezogenen noch bei prozessbezogenen Kompetenzen alle Kategorien sinnvoll gefüllt werden können. Dies führt zu weitgehend leeren Kategorien oder massiven Umdeutungen, letztere mit der Konsequenz, dass zentrale Termini im Elementarbereich eine andere Bedeutung gewinnen als die im Primarbereich etablierte. Damit wird eine wesentliche Stärke der Übernahme des Kompetenzmodells der Bildungsstandards für den Primarbereich zunichtegemacht: die Herstellung der Anschlussfähigkeit von Elementar- und Primarbereich, weil die identische Struktur inhaltliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede besser hervortreten lässt. In diesem Sinne sind auch die ein- oder dreidimensionalen Konzeptionen der Typen 3 und 2 kritisch zu sehen.

Die Übernahme des Kompetenzmodells der Bildungsstandards gemäß Typ 1 bedeutet weiter, dass die für die frühe mathematische Bildung typischen Tätigkeiten wie Klassifizieren, Seriieren und Strukturieren nicht explizit erwähnt werden. Aus diesem Grund werden sie in Typ 3 im Sinne von Inhaltsbereichen aufgeführt, was aber wiederum den inhaltsübergreifenden Charakter als für die Mathematik typische Tätigkeiten vernachlässigt. In Typ 2 hingegen werden für die frühe mathematische Bildung typischen Tätigkeiten wie Sortieren, Klassifizieren, Ordnen oder Seriieren explizit als weitere Kompetenzdimension hinzugefügt. Allerdings stößt dies insofern an Grenzen, als die dann drei Dimensionen zu wenig trennscharf sind (was grundsätzlich auch schon für die zwei Dimensionen der Bildungsstandards gilt): Sie lässt die Unterschiede zwischen inhaltsübergreifenden und inhaltsbezogenen Kompetenzen noch geringer werden. Generell ist die Bedeutung von Tätigkeiten wie Klassifizieren oder Seriieren unklar. Während sie in Anlehnung an Piaget und Szeminska (1972) als Vorläuferfähigkeiten des Zahlbegriffs gelten, lassen sie sich in manchen Konzeptionen eher unter die Leitidee „Muster und Strukturen“ subsumieren und sind von inhaltsübergreifendem Charakter.

Bei einer Konzeption als Wissenschaft von den Mustern als übergreifendem fachlichen Grundkonzept wie in Typ 4 besteht hingegen die Gefahr, dass die dahinterstehenden Tätigkeiten zwar in den Publikationen mitgedacht werden, möglicherweise aber nicht mehr von pädagogischen Fachkräften und Lehrkräften, die diese rezipieren. Auf der Ebene der mathematischen Bildungsangebote bedarf es einer expliziten und konkreten Fassung der damit gemeinten Tätigkeiten. Dies ist in den momentanen Publikationen und Materialpaketen noch nicht zufriedenstellend gelöst und kommt teilweise zu kurz (vgl. Müller & Wittmann, 2002; 2006; Wittmann & Müller, 2009; Wittmann, 2016).

Wenn man die vier Typen chronologisch betrachtet, so scheint in den letzten Jahren eine zunehmende Tendenz zu bestehen, die Konzepte früher mathematischer Bildung auch explizit an den Bildungsstandards für den Primarbereich zu orientieren, zumindest im Hinblick auf die Gliederung und die Terminologie. Besonders deutlich kann diese Entwicklung in den Publikationen derselben Autorinnen verfolgt werden: So von Benz (2010) zu Benz et al. (2015) und Benz et al. (2017), im Hinblick sowohl auf die inhaltsbezogenen als auch die prozessbezogenen Kompetenzen, so bei Rathgeb-Schnierer (2012; 2015) bezüglich der Einführung einer weiteren Kompetenzdimension.

Möglicherweise spiegelt sich darin wider, dass die mathematische Bildung im Elementarbereich mittlerweile etabliert ist, womit sie erstens offensiver vertreten wird und zweitens sich die Frage der Anschlussfähigkeit noch deutlicher stellt (vgl. Schuler et al., 2016), während zu Beginn der 2000er Jahre noch in vorsichtigerer Weise für die Einführung und Ausweitung mathematischer Bildung im Elementarbereich plädiert werden musste (exemplarisch Wittmann, 2004, S. 49 f.). Nicht zuletzt galt es, die negativen Erfahrungen mit der Fachorientierung des vorschulischen Lernens im Allgemeinen und der Neuen Mathematik in den 1960er und 1970er Jahren im Speziellen zu überwinden, und den daraus resultierenden Situationsansatz, der der sozialpädagogischen und nicht der vorschulischen Tradition zuzurechnen ist, im Zuge einer stärkeren Bildungsorientierung zu verdrängen (Schuler, 2013, S. 35 f.).

7. Vorschlag eines anschlussfähigen Kompetenzmodells

Auf der Grundlage der vorgenommenen Analysen wird im Folgenden ein Kompetenzmodell vorgeschlagen, das anschlussfähig einerseits an das Kompetenzmodell der schulischen Bildungsstandards und andererseits an den frühkindlichen Bildungsbegriff sein soll. Im Anschluss an die Darstellung der Grundlagen und normativen Aspekte (Abschn. 7.1) wird es gegliedert nach prozessbezogenen Kompetenzen (Abschn. 7.2) und inhaltsbezogenen Kompetenzen (Abschn. 7.3). International und in manchen Bildungsplänen werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen auch als *prozessbezogene Kompetenzen* bezeichnet (z. B. MKJS, 2016). Diese Terminologie wird im Folgenden auch für das vorgeschlagene Kompetenzmodell verwendet, da sie den Bezug zu einem an mathematischen Tätigkeiten orientierten Bild von Mathematik besser zum Ausdruck bringt.

7.1 Grundlagen und normative Aspekte

Eine Konzeption der frühen mathematischen Bildung in Gestalt eines Kompetenzmodells zu erstellen ist nicht nur analytisch im Sinne von „man nehme das Beste aus den vier Typen“, sondern auch normativ: Es werden Setzungen vorgenommen, wenngleich diese aufgrund der vorausgehenden Analysen stets begründet sind. Während die Forderung nach Kompetenzmodellen sich häufig auf empirisch validierte Modelle zur Beschreibung von Lernständen und -prozessen bezieht (vgl. Grüßing, 2009, S. 55 f.), wird sie hier normativ verstanden: Ein Kompetenzmodell soll die Art und Weise des Mathematiklernens sowie das dahinterstehende Bild von Mathematik und Mathematiklernen beschreiben und nicht dem Abprüfen von Lernständen dienen (vgl. Klieme et al., 2003, S. 33).

Entsprechend Typ 1 soll ein Kompetenzmodell für den Elementarbereich deshalb grundsätzlich sowohl prozessbezogene als auch inhaltsbezogene Kompetenzen umfassen, da das Zusammenspiel beider mathematisches Tätigsein auszeichnet. So ist es nur konsequent, im Sinne der Anschlussfähigkeit das Kompetenzmodell der Bildungsstandards für den Primarbereich auch für den Elementarbereich als Grundlage zu verwenden, aber gleichzeitig zu reduzieren und zu fokussieren (vgl. Lorenz, 2012, S. 110), und zwar sowohl bei den prozessbezogenen als auch bei den inhaltsbezogenen Kompetenzen. Denn nur wenn ein Kompetenzmodell Schwerpunkte setzt, kann es für die Aus- und Weiterbildung leitend sein und ein Bild des Mathematiklernens im Elementarbereich vermitteln. Deshalb müssen nicht alle mathematischen Inhalte, die irgendwann im Kindergarten auftauchen können, und nicht alle möglichen mathematikbezogenen Interessen von Kindern in einem solchen Kompetenzmodell aufgeführt werden. Für den Elementarbereich setzt sich damit fort, was sich schon bisher in den Bildungsstandards für die jeweiligen Schulstufen (Primarstufe: KMK, 2004a; Hauptschulabschluss: KMK: 2004b; Mittlerer Schulabschluss: KMK, 2003; Allgemeine Hochschulreife: KMK, 2012) andeutet: eine einheitliche Grundstruktur mit jeweils spezifischen Ausformungen und Erweiterungen (Abb. 2).

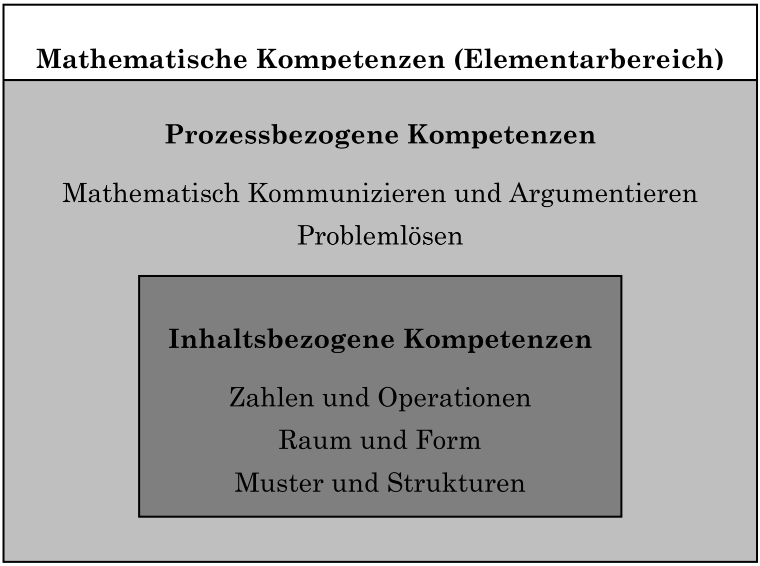

Abbildung 2: Modell mathematischer Kompetenzen für den Elementarbereich

7.2 Prozessbezogene Kompetenzen

Im vorgeschlagenen Modell werden das mathematische Kommunizieren und das mathematische Argumentieren zusammengefasst, weil sich beides nur schwer voneinander abgrenzen lässt. Insbesondere treten häufig nur einfache Argumentationen (ohne Stützung durch einen Garanten) auf (Lindmeier, Brunner & Grüßing, 2018). Demnach umfasst „mathematisch Kommunizieren und Argumentieren“ in diesem Verständnis

- das Beschreiben und Erläutern eigener Ideen und Lösungsansätze sowie das Verstehen und Nachvollziehen der Ideen und Lösungsansätze anderer,
- das Begründen eigener Ideen und Lösungsansätze,
- das Dokumentieren von Produkten (wie Mustern) als Grundlage eines Darüber-Sprechens.

Die prozessbezogene Kompetenz „mathematische Probleme lösen“ lehnt sich inhaltlich an die Standards der NCTM (2000, S. 116 ff.) an. Sie steht nicht nur für den Erwerb von Problemlösekompetenzen, sondern auch für ein Bild von Mathematiklernen, das die individuelle Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen als zentral ansieht (s. Abschn. 2.2).

Nicht aufgenommen wird „mathematisches Modellieren“, weil es im Elementarbereich nicht auftritt, sofern man das übliche Verständnis zugrunde legt (vgl. Abschn. 4.1). Ebenfalls nicht aufgenommen wird „mathematisches Darstellen“. Schon in den Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004a, S. 8) werden darunter Kompetenzen gefasst, die sich auf typisch mathematische Darstellungen und Darstellungswechsel sowie auf das Reflektieren von Darstellungen beziehen. Anders bei im Elementarbereich üblichen Darstellungen: Sie besitzen eine Ähnlichkeit mit dem Inhalt, auch wenn sie bereits auf Wesentliches reduziert sind und Unwesentliches weggelassen wurde, wie die Dokumentation des Musters einer Perlenkette (Rathgeb-Schnierer, 2008), weil die Farbreihenfolge noch als solche erkennbar ist, oder eine Strichliste, weil sie noch das Abzählen erlaubt, anders als die Zifferndarstellung einer Zahl. Es handelt sich stets um „realistische Bilder“ und „depiktionale Repräsentationen“ im Sinne von Schnotz (2010). Ein im Vorschulalter übliches Dokumentieren ist deshalb nicht als Tätigkeit im Sinne des mathematischen Darstellens einzuordnen, sondern eher als Teilaspekt des mathematischen Kommunizierens, insbesondere deshalb, weil die Dokumente häufig eine Grundlage für den Austausch bilden.

7.3 Inhaltsbezogene Kompetenzen

Grundlegend im Folgenden ist ein Verständnis von Leitideen als vielfach miteinander verflochtenen Themensträngen, die die vertikale Vernetzung über die Jahrgangs- und Schulstufen hinweg sicherstellen sollen, im Unterschied zu einem Verständnis als disjunkte Inhaltsbereiche.

Die Übernahme aller fünf Leitideen aus den Bildungsstandards für den Primarbereich (wie in Typ 1) lässt sich damit begründen, dass dies die volle inhaltliche Breite früher mathematische Bildung betont und ein klares Signal gegen eine befürchtete Reduktion auf Zahlen und Zählen setzt. Für eine kleinere Anzahl von Leitideen spricht hingegen, dass nicht alle Leitideen als solche von Bedeutung sind und nur teilweise gefüllt werden können (s. Abschn. 4.1). In Bezug auf „Größen und Messen" sind im Elementarbereich nur wenige Aspekte von Bedeutung, so

- das Vergleichen und Ordnen von Objekten aufgrund ihrer Größe (oder anderer messbarer Eigenschaften),
- das Sammeln erster Erfahrungen beispielsweise mit Geld in Spielsituationen,
- das Lernen der Uhrzeiten (noch nicht unbedingt der Größe Zeit im Sinne von Zeitspannen),
- das Sammeln erster Erfahrungen mit Messwerkzeugen (wie der Küchenwaage oder dem Maßband).

Zentrale Aspekte der Leitidee wie der indirekte Vergleich mit individuellen und normierten Einheiten sowie die Einführung von Größen müssen im Elementarbereich nicht gezielt gefördert werden – was nicht bedeutet, dass nicht auch entsprechende Aktivitäten von Seiten der Kinder unterstützt werden können (für ein diesbezügliches viel zitiertes Beispiel vgl. Reggio Children, 2002).

In ähnlicher Weise gilt dies auch für die Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit". Typische Tätigkeiten im Elementarbereich sind

- das Stapeln von Objekten zum Anzahlvergleich als enaktiver Zugang oder das Zeichnen von Piktogrammen als ikonischer Zugang zu Säulendiagrammen,
- das Sammeln von Erfahrungen zu Wahrscheinlichkeiten beim Spielen,

in Abgrenzung zu einem systematischen Zugang zu „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten" in der Grundschule.

Deshalb spielen „Größen und Messen" sowie „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" im Elementarbereich eine eher untergeordnete Rolle (vgl. Wittmann, 2003; 2004; 2006; Rathgeb-Schnierer, 2012; 2015) und tragen insbesondere nicht als Leitideen. Von Bedeutung sind deshalb drei Leitideen:

- „Zahlen und Operationen“ umfasst im Kern alle Kompetenzen auf dem Weg zum Zahlbegriff. Insofern erscheint es auch sinnvoll, hier Operationen mit aufzunehmen, da beispielsweise Weiterzählen und Zahlzerlegungen als ein erstes Rechnen ebenfalls von Bedeutung sind.
- „Raum und Form“ bezieht sich erstens auf die Förderung der visuellen Wahrnehmung und des räumlichen Vorstellungsvermögens und zweitens auf erste Erfahrungen zu geometrischen Figuren und ihren Eigenschaften (geometrische Begriffsbildung).
- „Muster und Strukturen“ umfasst Kompetenzen, die sich auf das Strukturieren einer Menge von Objekten aufgrund von Kriterien und auf Muster im Sinne von Regelmäßigkeiten oder Wiederholungen beziehen: Sortieren (Klassen bilden), Ordnen (der Größe nach), Muster (Folgen bilden). Die Bildungsstandards für den Primarbereich werden hier „nach unten“ erweitert. Unter „Muster und Strukturen“ lassen sich insbesondere auch die mathematischen Denk- und Handlungsweisen nach Rathgeb-Schnierer (2012; 2015) subsumieren.

Diese Reduzierung der Leitideen folgt zunächst der Forderung von Wittmann (2016) nach einer Fokussierung auf „Zahlen“ und „Formen“. Die zusätzliche Aufnahme von „Muster und Strukturen“ erfolgt in Anlehnung an die Bildungsstandards, wohlwissend, dass „Muster und Strukturen“ als Leitidee nicht unumstritten ist, wenn man die zugehörigen Kompetenzen als inhaltsübergreifend ansieht (vgl. Abschn. 4.2). Aus diesem Grund verzichten neuere Bildungspläne für die Grundschule darauf (MBBW, 2014; MKJS, 2016).

8. Ausblick

Das vorgeschlagene Kompetenzmodell ist noch kaum empirisch fundiert, wie auch alle anderen hier analysierten. Insbesondere in Bezug auf die prozessbezogenen Kompetenzen existieren allenfalls punktuelle Befunde: Bei mathematischen Spielen können auch im Elementarbereich schon prozessbezogene Kompetenzen auftreten, wobei diesbezüglich die Spiel- und Lernbegleitung durch passende Impulse entscheidend ist (Schuler, 2013, S. 154 ff.; Schuler & Sturm, 2019). Es kann empirisch belegt werden, dass die Vorläuferfähigkeiten zum Argumentieren sowie das mathematische Wissen bei fünf- bis sechsjährigen Kindern zwei verschiedene Konstrukte sind, die jedoch hoch miteinander korrelieren (Lindmeier, Brunner & Grüßing, 2018). Generell sind allerdings die Konzeptualisierungen prozessbezogener Kompetenzen im Elementarbereich bislang noch uneinheitlich: Beispielsweise ist die Abgrenzung von mathematischem Argumentieren zu einem sachbezogenen alltagsweltlichen Argumentieren noch ungeklärt, da das mathematische Argumentieren stets in Spiel- oder anderen Sachkontexten stattfindet.

Trotz dieser Forschungsdesiderate kann das Kompetenzmodell allen, die frühe mathematische Bildung konzipieren, eine Entscheidungshilfe geben, welche Aspekte früher mathematischer Bildung zentral sind und in welchen Bereichen Schwerpunkte gesetzt werden sollten. Es ist einerseits explizit anschlussfähig an den Primarbereich (Schuler et al., 2016) im Sinne eines kumulativen Aufbaus von Kompetenzen und lässt diese Anschlussfähigkeit auch für pädagogische Fachkräfte in der Praxis erkennbar werden, wird andererseits aber auch den Besonderheiten des Elementarbereichs gerecht und bildet die dort relevanten inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen in adäquater Weise ab.

Lesehinweis: Für alle, die sich mit früher mathematischer Bildung beschäftigen, ist es sicherlich lohnend, die im Text analysierten Konzeptionen im Original zu lesen: Benz, Peter-Koop & Grüßing (2015), Benz et al. (2017), Rathgeb-Schnierer (2012; 2015), Steinweg (2008). Grundsätzliche Überlegungen zur Bildung im Elementarbereich in praxisorientierter Form finden sich bei Fölling-Albers (2013), Stamm (2012) sowie Stamm & Edelmann (2013).

Literatur

Benz, C. (2010). *Minis entdecken Mathematik.* Braunschweig: Westermann.

Benz, C., Peter-Koop, A., Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Benz, C., Grüßing, M., Lorenz, J. H., Reis, K., Selter, C. & Wollring, B. (2017). *Frühe mathematische Bildung – Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich.* Opladen: Barbara Budrich.

Bostelmann, A. (2009) (Hrsg.). *Jederzeit Mathezeit. Das Praxisbuch zur mathematischen Frühförderung in der Kita*. Mülheim an der Ruhr: Verlag an der Ruhr.

Devlin, K. (1997). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Fölling-Albers, M. (2013). Erziehungswissenschaft und frühkindliche Bildung. In M. Stamm & D. Edelmann (Hrsg.), *Handbuch frühkindliche Bildungsforschung* (S. 37–49). Wiesbaden: Springer VS.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Band 1). Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. *Grundschule* 14 (4), 140–142.

Friedrich, G., de Galgóczy, V. & Schindelhauer, B. (2011). *Komm mit ins Zahlenland. Eine spielerische Entdeckungsreise in die Welt der Mathematik* (überarb. Neuaufl.). Freiburg: Herder.

Fthenakis, W. E. (2002). Der Bildungsauftrag in Kindertageseinrichtungen: ein umstrittenes Terrain. *Bildung, Erziehung, Betreuung* 7(1), S. 6–10.

Fthenakis, W. E., Schmidt, A., Daut, M., Eitel, A. & Wendell, A. (2009). *Frühe mathematische Bildung* (Natur-Wissen schaffen, Band 2). Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Fuchs, M. (2015). *Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Lerngruppen*. Seelze: Klett/Kallmeyer.

Gerlach, M., Fritz, A., & Leutner, D. (2013). *MARKO – T: Mathematik und Rechenkonzepte im Vorschul- und frühen Grundschulalter – Training*. Göttingen: Hogrefe.

Glaus, I. & Senft, W. (1969). *Mathematische Früherziehung. Analyse und Beispiel*. Stuttgart: Klett.

Grüßing, M. (2009). Mathematische Kompetenzentwicklung zwischen Elementar- und Primarbereich. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium: Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 53–58). Münster: Waxmann.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim/Basel: Beltz.

Hoenisch, N. & Niggemeyer, E. (2007). *Mathe-Kings. Junge Kinder fassen Mathematik an* (2., überarb. Aufl.). Weimar: verlag das netz.

JMK & KMK – Jugendministerkonferenz und Kultusministerkonferenz (2004). *Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen*. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_06_04-Fruehe-Bildung-Kitas.pdf [23.11.2010].

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Hannover: Schroedel.

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung* (2., überarb. Aufl.). Wiesbaden: Springer VS.

KMK – Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003. http://www.kmk.org/fileadmin/ veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [15.01.2016].

KMK – Kultusministerkonferenz (2004a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffent lichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf [15.01.2016].

KMK – Kultusministerkonferenz (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss.* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/ver-oeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf [15.01.2016].

KMK – Kultusministerkonferenz (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. http://www.kmk.org/file-admin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf [15.01.2016].

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E. & Vollmer, H.-J. (2003). *Expertise. Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards.* Bonn: BMBF.

Koch, K., Schulz, A. & Jungmann, T. (2015). *Überall steckt Mathe drin: alltagsintegrierte Förderung mathematischer Kompetenzen für 3- bis 6-jährige Kinder.* München: Ernst Reinhardt Verlag.

Kornmann, R. (2010). *Mathematik von Anfang an.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2007). *Mengen, zählen, Zahlen.* Berlin: Cornelsen.

Laewen, H.-J. (2006). Funktionen der institutionellen Früherziehung: Bildung, Erziehung, Betreuung, Prävention. In L. Fried & S. Roux (Hrsg.), *Handbuch der Pädagogik der frühen Kindheit* (S. 96–107). Weinheim, Basel: Beltz.

Lee, K. (2010). *Kinder erfinden Mathematik. Gestaltendes Tätigsein mit gleichem Material in großer Menge.* Weimar, Berlin: verlag das netz.

Liegle, L. (2011). Pädagogische Prinzipien zur Rechtfertigung von Kontinuität in den Bildungsverläufen von Kindern. In S. Oehlmann, Y. Manning-Chlechowitz & M. Sitter (Hrsg.), *Frühpädagogische Übergangsforschung. Von der Kindertageseinrichtung in die Ganztagesschule* (S. 159 – 170). Münster: Waxmann.

Lindmeier, A., Brunner, E. & Grüßing, M. (2018). Early mathematical reasoning – theoretical foundations and possible assessment. In E. Bergqvist, M.

Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, S. 315–322). Umeå: PME.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik. Frühe mathematische Bildung und Förderung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., aktual. Aufl.). Weinheim: Beltz.

MBWWK – Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur Rheinland-Pfalz (2014). *Rahmenplan Grundschule: Teilrahmenplan Mathematik*. https://grundschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/grundschule.bildung-rp.de/Downloads/Rahmenplan/Rahmenplan_Grundschule_TRP_Mathe_01_08_2015.pdf [04.10.2019].

MKJS – Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2016). *Bildungsplan der Grundschule: Mathematik*. http://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GS/M [04.10.2016].

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (2002). *Das kleine Zahlenbuch*. Teil 1: Spielen und Zählen. Seelze: Kallmeyer.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (2006). *Das kleine Formenbuch*. Teil 1: Legen – Bauen – Spiegeln. Seelze: Kallmeyer.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neunzig, W. (1972). *Mathematik im Vorschulalter*. Freiburg: Herder.

Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In K. Stacey & R. Turner (Hrsg.), Assessing Mathematical Literacy. The PISA experience (S. 35–55). New York: Springer.

Peter-Koop, A. (2009). Orientierungspläne Mathematik für den Elementarbereich – ein Überblick. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium: Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 47–52). Münster: Waxmann.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1972). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde* (3. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Preiß, G. (2004/05). *Leitfaden Zahlenland* (2 Bände). Kirchzarten: Zahlenland Verlag Prof. Preiß.

Rathgeb-Schnierer, E. (2008). Mathematik im Kindergartenalltag entdecken und erfinden – Konkretisierung eines Konzepts zur mathematischen Denkentwicklung am Beispiel von Perlen. In B. Daiber & I. Weiland (Hrsg.), *Impulse der Elementardidaktik* (S. 77–88). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Rathgeb-Schnierer, E. (2012). Mathematische Bildung. In D. Kucharz (Hrsg.), *Elementarbildung* (S. 50–85). Weinheim: Beltz.

Rathgeb-Schnierer, E. (2015). Mathematische Bildung im Kindergarten. In B. Hauser, E. Rathgeb-Schnierer, R. Stebler & Vogt, F. (Hrsg.), *Mehr ist mehr. Mathematische Frühförderung mit Regelspielen* (S. 10–25). Seelze: Klett, Kallmeyer.

Reggio Children (Hrsg.) (2002). *Schuh und Meter. Wie Kinder im Kindergarten lernen*. Weinheim: Beltz.

Royar, T. & Streit, C. (2010). *MATHElino: Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen*. Stuttgart: Klett.

Roßbach, H.-G. (2004). Kognitiv anregende Lernumwelten im Kindergarten. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, Beiheft 3, S. 9–24.

Schäfer, G. E. (2006). Der Bildungsbegriff in der Pädagogik der frühen Kindheit. In L. Fried & S. Roux (Hrsg.), *Handbuch der Pädagogik der frühen Kindheit* (S. 33–44). Weinheim, Basel: Beltz.

Schnotz, W. (2018). Visuelles Lernen. In D. H. Rost (Hrsg.*), Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (5. Aufl., S. 927–934). Weinheim: Beltz.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Hrsg.), *Mathematical thinking and problem solving. Studies in Mathematical Thinking and Learning* (S. 53–75). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs*. Münster: Waxmann.

Schuler, S., Bönig, D., Thöne, B., Wenzel-Langer, D. & Wittkowski, A. (2016). *Anschlussfähigkeit von Kindergarten und Grundschule*. In Wittmann, G., Levin, A. & Bönig, D. (Hrsg.), *AnschlussM. Anschlussfähigkeit der mathematikdidaktischen Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen* (S. 19–39). Münster. Waxmann.

Schuler, S. & Sturm, N. (2019, i. Dr.). Mathematische Aktivitäten von 5- bis 6-jährigen Kindern beim Spielen mathematischer Spiele - Lerngelegenheiten bei direkten und indirekten Formen der Unterstützung. In Weltzien, D., Wadepohl, H., Jegodtka, A., Schmude, C. & Wedekind, H. (Hrsg.), *Interaktionen und Settings in der frühen MINT-Bildung*. Freiburg: FEL-Verlag.

Selter, C. & Wollring, B. (2017). Prozessbezogene mathematische Kompetenzen. In C. Benz, M. Grüßing, J. H. Lorenz, K. Reis, C. Selter & B. Wollring (Hrsg.), *Frühe mathematische Bildung – Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich* (S. 33–42). Opladen: Barbara Budrich.

Stamm, M. (2012). Der Beitrag frühkindlicher Bildung zur sozialen Gerechtigkeit und zur Armutsprävention. In Caritas Schweiz (Hrsg.), *Sozialalmanach 2012: Arme Kinder* (S. 140-155). Luzern: Caritas.

Stamm, M. & Edelmann, D. (2013). Einleitung ins Handbuch. In M. Stamm & D. Edelmann (Hrsg.), *Handbuch frühkindliche Bildungsforschung* (S. 13-21). Wiesbaden: Springer VS.

Steinweg, A. S. (2008). Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.), *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 143–159). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Stemmer, J. (2015). Steine sammeln. Ein Regelspiel zur Anregung und Beobachtung mathematischer Aktivitäten bei Kindern. *Die Grundschulzeitschrift*, 29 (281), 38–41.

Taylor, R. (2006). *Mathematik: zählen, ordnen, messen. 3-6 Jahre.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 7(3), 106–116.

Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Wiesbaden: Vieweg.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM*, 61, S. 37–46.

Wittmann, E. C. (1974). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht in der Grundschule? In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule* (S. 18–46). Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. C. (2004). Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In G. Faust et al. (Hrsg.), *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich* (S. 49–63). Klinkhardt: Bad Heilbrunn.

Wittmann, E. C. (2016). Die Grundkonzeption des Mathe 2000-Frühförderprogramms. In E. C. Wittmann (Hrsg.), *Kinder spielerisch fördern – mit echter Mathematik* (S. 22–45). Seelze: Klett Kallmeyer.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. Van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2009). *Das Zahlenbuch. Gesamtpaket zum Frühförderprogramm.* Stuttgart: Klett.

Wittmann, G. & Schuler, S. (2016). Allgemeine mathematische Kompetenzen. Explikation eines zentralen Begriffs der Bildungsstandards. In H. Hahn, I.

Esslinger-Hinz. &. A. Panagiotopoulou (Hrsg.), *Paradigmen und Paradigmenwechsel in der Grundschulpädagogik: Entwicklungslinien und Forschungsbefunde* (S. 70–84). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.