ISSN 2701-9012 ZMFP, Vol.2 (2021)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Uta Häsel-Weide & Christian Schöttler

# Das Dezimalsystem verstehen – Bedeutung, Erkenntnisse, Anregungen

## Zusammenfassung

Der Aufbau eines dezimalen Stellenwertverständnisses ist von hoher Relevanz für ein erfolgreiches schulisches Lernen und bedarf daher einer besonderen Aufmerksamkeit; insbesondere da Studien zeigen, dass in dem Bereich einige Lernende erhebliche Schwierigkeiten zeigen. Dieser Artikel befasst sich mit dem Stellenwertverständnis und der Frage, wie dieses in Klassengesprächssituationen von Lehrkräften erfasst und durch geeignete Impulse vertieft werden kann. Zunächst werden im theoretischen Teil der Aufbau des Dezimalsystems und der Forschungsstand zum Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems erläutert. In dem Zusammenhang stellen wir auch ein Modell vor, in dem vier Arten dezimaler Deutungen unterschieden werden und welches als Werkzeug dabei helfen kann, interaktive Äußerungen von Lernenden hinsichtlich des gezeigten dezimalen Verständnisses zu untersuchen. Im Anschluss analysieren wir beispielhaft zwei Szenen aus dem Mathematikunterricht

Prof. Dr. Uta Häsel-Weide, Universität Paderborn Institut für Mathematik, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Deutschland.
e-mail: uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de

Dr. Christian Schöttler, Universität Duisburg-Essen, Institut für Mathematik, Thea-Leymann-Straße 9, 45127 Essen, Deutschland.
e-mail: christian.schoettler@uni-duisburg-essen.de

der Klassen 2 und 6 mit Mitteln der interpretativen Unterrichtsforschung. Ziel ist, zunächst anhand der konkreten Fallbeispiele zu zeigen, wie die beteiligten Lernenden dezimale Beziehungen deuten, welches Verständnis sie dabei zeigen und wie durch Impulse von der Lehrkraft ein vertieftes inhaltliches Verständnis angeregt werden kann. Abschließend werden in einem abduktiven Prozess über die analysierten Szenen hinausgehende Erkenntnisse und Schlussfolgerungen diskutiert und der Nutzen für den Mathematikunterricht erläutert.

**Schlagworte**

*Dezimalsystem, Stellenwertverständnis, Interaktion, Argumentationsanlass, Deutung dezimaler Beziehungen*

## 1. Einführung in die Bedeutung des Stellenwertverständnisses

Die Entwicklung eines tragfähigen dezimalen Stellenwertverständnisses zählt zu den wichtigsten mathematischen Lerninhalten der Grundschulzeit und ist u. a. die Basis zum flexiblen Rechnen, aber auch für das Verstehen von Dezimalbrüchen. Dabei ist die spiralige Entwicklung der Idee des Stellenwertsystems (Wittmann, 1995) gleichermaßen eine Chance, wesentliche Verstehensinhalte auch noch zu einem späteren Zeitpunkt zu erwerben und eine Herausforderung, weil das Stellenwertverständnis so fundamental ist. Studien zeigen allerdings, dass der Erwerb tragfähiger Vorstellungen zum Stellenwertsystem Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereitet; zum Teil bis weit in die Sekundarstufe (z. B. Cawley et al., 2007; Freesemann, 2014; Humbach, 2008; Moser Opitz, 2013; Ostad, 1997).

Zum Aufbau eines tragfähigen Verständnisses scheint es wichtig zu sein, dass mit Zahlen nicht ausschließlich regelgeleitet umgegangen wird, sondern die dezimale Struktur und die Beziehungen zwischen den Zahlen erkannt und thematisiert werden. Dazu sollten Schülerinnen und Schüler durch geeignete Lernumgebungen und eine auf das inhaltliche Verständnis abzielende Interaktion angeregt werden, z. B. indem durch struktur-analoge Aufgaben der Blick auf die Stellenwerteigenschaft gerichtet (vgl. Abb. 1 & Kap. 4.1) oder diese durch die Interpretation mehrdeutiger Zahlenkarten anregt wird (Abb. 2 & Kap. 4.2).

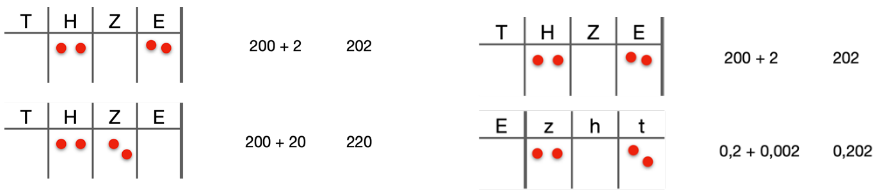



Abbildung 1a und 1b: Vergleicht die Zahlen in der Stellenwerttafel

Lehrpersonen sind in dem Zusammenhang herausgefordert, die sich zeigenden Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler im unterrichtlichen Prozess der Bearbeitung von Aufgabenstellungen zu erfassen und die Deutungen dezimaler Beziehungen im Hinblick auf das gezeigte dezimale Verständnis zu bewerten sowie durch geeignete Impulse ein tieferes

Verstehen zu initiieren. Dabei stellen sich verschiedene Fragen: Wie lassen sich Lernendenaussagen über dezimale Beziehungen im Hinblick auf das gezeigte dezimale Stellenwertverständnis einschätzen? Worin zeigt sich in den Deutungen dezimales Stellenwertverständnis? Kann man überhaupt nur auf der Basis von Lernendenäußerungen Rückschlüsse auf das dezimale Verständnis ziehen?

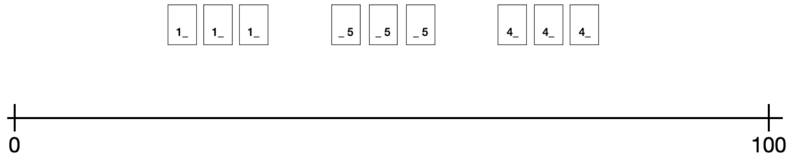



Abbildung 2: Zahlenkarten mit Lücken zur Positionierung am leeren Zahlenstrahl

Vor diesem Hintergrund werden in diesem Artikel der Forschungsstand zum dezimalen Stellenwertverständnis von Schülerinnen und Schülern erläutert und insbesondere vier Arten dezimaler Deutungen als Ergebnis der eigenen, vorhergegangen Forschungsarbeit dargestellt. Mithilfe dieser Deutungen lässt sich untersuchen, welches Verständnis Lernende zeigen und in welchem Maß sie strukturelle Eigenschaften des dezimalen Stellenwertsystems verstehen. Wie Lehrkräfte im Klassengespräch zu strukturellen Deutungen anregen können, wird an zwei Beispielszenen aus dem Mathematikunterricht der Klassen 2 und 6 diskutiert.

## 2. Orientierung und Forschungsstand zum Aufbau und Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems

### 2.1 Fachliche Klärung

Für den Aufbau von tragfähigen Zahlvorstellungen sowohl im Bereich der natürlichen Zahlen als auch der Dezimalbrüche ist das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems unabdingbar, denn: „Wie ein Kind seinen „Zahlenraum“ gedanklich konstruiert, ist […] untrennbar damit verbunden, was es über das dezimale Stellenwertsystem denkt, weiß, vermutet“ (Gaidoschik, 2009, S. 12; Hervorhebung im Original). Das Dezimalsystem beinhaltet verschiedene Eigenschaften und Prinzipien, die die Kinder erarbeiten, verstehen und miteinander verbinden müssen (Mosandl & Sprenger, 2017). Erst die Integration aller Aspekte führt zu einem umfassenden Verständnis. In dem Zusammenhang lässt sich zwischen einem strukturorientierten und einem positionsorientierten Verständnis unterscheiden (Treffers, 2001; vgl. auch Freesemann, 2014; Schöttler, 2019), die jeweils unterschiedliche Aspekte des dezimalen Stellenwertverständnisses fokussieren.

*Das strukturorientierte Verständnis*

Bei dem strukturorientierten Verständnis steht der Aufbau und die Darstellung von Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem im Mittelpunkt und der kardinale Zahlaspekt wird betont (Freesemann, 2014; Schöttler, 2019). Die Darstellung von Zahlen gilt als eine zentrale mathematische Grundidee und folgt zwei Prinzipien, die charakteristisch für Stellenwertsysteme sind: das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip (Krauthausen, 2018; Padberg & Benz, 2011). Grundlegend für ein Verständnis dieser beiden Prinzipien ist die Einsicht in das Teil-Ganzes-Prinzip (Ross, 1989).

Das **Teil-Ganzes-Prinzip** umfasst das Verständnis, dass jede Menge als ein Ganzes aufgefasst werden kann, welches flexibel in verschiedene Teile zerlegbar sowie umgekehrt aus diesen Teilen wieder zusammensetzbar ist (Padberg & Benz, 2011; Resnick, 1983; Ross, 1989). Eine Einsicht in das Teil-Ganzes-Prinzip ist eine wichtige Voraussetzung für das Verständnis des Dezimalsystems. So müssen Zahlen nicht nur als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen, sondern auch als Zusammensetzungen von Stellenwerten, die jeweils Vielfache von Zehnerpotenzen sind, sowie als Subjekte von Zehnerbündelungen interpretiert werden (Resnick, 1983; Ross, 1989).

Das **Prinzip der fortgesetzten Bündelung** ist wesentlich für das Darstellen von sowie das Rechnen mit Zahlen im dezimalen Zahlsystem (Müller & Wittmann, 1984). Im Dezimalsystem werden auf der Grundlage der Basis Zehn immer zehn Elemente einer Einheit zu gleichmächtigen Teilmengen der nächst größeren Einheit zusammengefasst und zwar solange, bis keine weiteren Gruppen mehr gebildet werden können (Krauthausen, 2018; Scherer & Moser Opitz, 2010). Damit werden als Bündelungseinheiten Zehnerpotenzen (...$10^{-2}$; $10^{-1}$; $10^{0}$; $10^{1}$; $10^{2}$...) verwendet. Da im Dezimalsystem immer zehn Elemente gebündelt werden,

werden bei der Notation der Bündel nur zehn unterschiedliche Ziffern (0 – 9) benötigt, um beliebig große Zahlen aufschreiben zu können.

Nach der Zahlbereichserweiterung zu Dezimalbrüchen lässt sich das Prinzip der fortgesetzten Bündelung auch auf die gebrochenen Einheiten übertragen. Dabei werden allerdings bei Bündeln kleiner als Eins keine ganzen Elemente, sondern Teile eines Ganzen gebündelt.

Das **Stellenwertprinzip** baut auf dem Prinzip der fortgesetzten Bündelung auf, da dieses eine notwendige Voraussetzung für die Stellenwerte darstellt, dennoch ist dieses als ein eigenständiges Prinzip zu betrachten (Ladel & Kortenkamp, 2014). Dabei bezieht sich das Stellenwertprinzip auf die Notation der Bündelungsergebnisse in einer geordneten Ziffernfolge, die den Konventionen entsprechend von rechts nach links gelesen die Anzahl der Einer-, Zehner-, Hunderterbündel usw. wiedergibt. Grundlage stellt das Wissen um die Namen der einzelnen Stellenwerte und deren Reihenfolge hinsichtlich ihrer Größe (…< Zehntel < Einer < Zehner < Hunderter <…) sowie im Bereich der Dezimalbrüche die Rolle des Kommas als Übergang von ganzen zu gebrochenen Einheiten dar.

Insgesamt umfasst das Stellenwertprinzip vier Eigenschaften, die für die Interpretation von beliebigen Ziffernfolgen als Zahlen benötigt werden (vgl. Ross, 1989, S. 47):

- Stellenwerteigenschaft: Innerhalb einer Zahldarstellung kann dieselbe Ziffer Unterschiedliches bedeuten; Ziffern wird nicht permanent ein fester Wert zugeordnet. Stattdessen ist der Wert einer Ziffer durch ihre Position in der Zahl bestimmt (Krauthausen, 2018; Padberg & Benz, 2011); jede Ziffer steht für einen Stellenwert. So liefert jede Ziffer in einer Zahldarstellung zwei Informationen:
    - Sie gibt die Anzahl der jeweiligen Elemente in der Bündelungseinheit an (Zahlenwert der Ziffer).
    - Sie informiert in Abhängigkeit ihrer Position innerhalb der Zahl über den spezifischen dekadischen Wert (Stellenwert der Ziffer).
- Eigenschaft der Zehnerbasis: Die Werte der einzelnen Stellen steigen von rechts nach links um Zehnerpotenzen; jeder Stellenwert wird durch eine spezifische Zehnerpotenz visualisiert.

- Multiplikative Eigenschaft: Der Wert einer Ziffer wird durch Multiplikation des Zahlenwertes mit dem Stellenwert der Ziffer ermittelt.
- Additive Eigenschaft: Der Gesamtwert einer Zahl ergibt sich aus der Summe aller Werte der einzelnen Stellen.

Prinzip der fortgesetzten Bündelung und Stellenwertprinzip gelten für alle Zahlen, die sich in der Dezimalschreibweise darstellen lassen; unter anderem natürliche Zahlen und Dezimalbrüche. Dies folgt aus einer konsequenten Anwendung der Prinzipien.

Wenn Lernende im Bereich der natürlichen Zahlen ein tragfähiges dezimales Stellenwertverständnis aufgebaut haben, können die gelernten Eigenschaften und Prinzipien auf den Zahlbereich der Dezimalbrüche übertragen und strukturgleich genutzt werden (Schmassmann, 2009; Sprenger, 2018). Zusätzlich müssen für ein inhaltliches Dezimalbruchverständnis die grundlegende Bedeutung der Grundvorstellung von Brüchen bzw. Zehnerbrüchen als Teil eines Ganzen, die Rolle des Kommas als Teil des Stellenwertprinzips sowie die Gleichwertigkeit von Dezimalbrüchen und Brüchen erarbeitet werden (Sprenger, 2018, S. 234).

*Das positionsorientierte Verständnis*

Bei dem positionsorientierten Verständnis steht die Zahlenreihe im Mittelpunkt und der ordinale Zahlaspekt wird betont. Dabei soll die Vorstellung aufgebaut werden, dass alle Zahlen eine geordnete Reihe bilden, in der jede Zahl eine feste Position einnimmt (Treffers, 2001).

Lorenz (2013) geht davon aus, dass Zahlen „in Form einer bildhaften Darstellung repräsentiert [werden], als visueller Zahlenraum“ (S. 185), welcher die individuellen Vorstellungen von Zahlen und Größen widerspiegelt (Dehaene, 1999, S. 79ff). Die individuellen Zahlenraumvorstellungen bilden einen imaginären Zahlenraum, in dem die Zahlen meist räumlich-linear repräsentiert sind. Der „mentale Zahlenstrahl“ erhielte seine Struktur aus dem Wissen um den Aufbau des Dezimalsystems, da dieser die im Dezimalsystem notierten, aus Ziffern zusammengesetzte Zahlen beinhaltet. Ohne ein Verständnis der dezimalen Ziffernschreibweise sowie der dezimalen Strukturen würde der mentale Zahlenstrahl wenig beim Umgang mit Zahlen helfen (Gaidoschik, 2015, S. 167f). Damit baut das positionsorientierte Verständnis auf dem strukturorientierten Verständnis auf. Ausgehend von einem strukturorientierten Verständnis kann die Vorstellung von linear geordneten Zahlen dabei helfen, Zahlen zu ordnen und zu vergleichen, Zahlen in der Zahlenreihe zu platzieren, in Schritten zu zählen, Nachbareinheiten, d.h. Vorgänger und Nachfolger, Nachbarzehner und Nachbarhunderter, zu bestimmen sowie Zahl- und Größenvorstellungen aufzubauen.

Das Dezimalsystem ist ein komplexes und abstraktes Symbolsystem. Für ein umfassendes Verständnis müssen die Lernenden die vielfältigen Eigenschaften des Dezimalsystems erarbeiten, verstehen, anwenden und angemessene inhaltliche Vorstellungen aufbauen (vgl. Fromme, 2017; Ross, 1989). Dazu könnte einerseits der Aufbau und die Darstellung von Zahlen auf der Basis des Prinzips der fortgesetzten Bündelung und des Stellenwertprinzips verdeutlicht werden, um jede Zahldarstellung interpretieren zu können. Andererseits könnten immanente, dekadisch strukturierte Zahlenraumvorstellungen aufgebaut werden, in denen die Zahlen eine geordnete Reihe bilden. Dazu sollen die Lernenden dezimale Zusammenhänge und Zahlbeziehungen erkennen und verstehen sowie den analogen Aufbau und die dezimale Struktur des dezimalen Stellenwertsystems nachvollziehen.

### 2.2 Forschungsstand zum Aufbau eines tragfähigen Stellenwertverständnisses

Dem Verständnis des Dezimalsystems wird eine große Bedeutung beigemessen, gilt es doch als eines der wichtigsten Konzepte, welches die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht verstehen müssen (Moeller et al., 2011; van de Walle et al., 2013). Gleichzeitig ist das Dezimalsystem als eine kritische Stelle im mathematischen Lernprozess aufzufassen (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013), welches als eine unverzichtbare Verstehensgrundlage jedoch nicht von allen Lernenden in ausreichendem Maße verstanden wird (Cawley et al., 2007; Freesemann, 2014; Moser Opitz 2013). Diese Lernenden orientieren sich an einzelnen Objekten, Darstellungen oder äußern einzelne Wissenselemente, ohne ein Verständnis für die strukturellen dezimalen Beziehungen aufzubauen.

*Schwierigkeiten beim Verständnis des Dezimalsystems im Bereich der natürlichen Zahlen*

Aufgaben zum dezimalen Verständnis erwiesen sich in einer Untersuchung von Moser Opitz (2013, S. 201) für Lernende der Sekundarstufe I als mit die schwierigsten Aufgaben eines Mathematiktests, der zahlreiche Aspekte des arithmetischen Grundschulinhaltes abdeckte. Zudem zeigte sich, dass gute und sichere Kenntnisse des Dezimalsystems einen zentralen Prädiktor zur Erklärung der Mathematikleistungen in der weiterführenden Schule darstellen. Während die Untersuchung von Moser Opitz (2013) die Schwierigkeiten von Lernenden in der unteren Sekundarstufe I sichtbar macht, kommt Humbach (2008) zu der Erkenntnis, dass Schülerinnen und Schüler mit schwachen mathematischen Leistungen am Ende der Sekundarstufe I noch über ein rudimentäres Verständnis natürlicher Zahlen im Dezimalsystem verfügen. Als spezifische Schwierigkeiten oder Hürden konnten Schwierigkeiten beim Verständnis des Prinzips der fortgesetzten Bündelung und des Stellenwertprinzips (1), der Orientierung am Zahlenstrahl (2) sowie beim Verständnis großer Zahlen (3) identifiziert werden, die die Entwicklung eines tragfähigen dezimalen Stellenwertverständnisses beeinträchtigen (z. B. Cawley et al., 2007; Fromme, 2017; Humbach, 2008; Kamii, 1986; Moser Opitz, 2013; Ostad, 1997; Ross, 1989).

In Bezug auf das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip (1) zeigen sich Schwierigkeiten weniger bei Aufgaben, die lediglich oberflächliche Kenntnisse überprüfen, sondern bei Aufgaben, die gezielt auf das Stellenwertverständnis zielen: Z. B. Zahlen aus Zerlegungen zusammensetzen, die (a) nicht in der üblichen Reihenfolge gemäß des Stellenwerts gegeben sind (z. B. 3 + 900 = ) oder (b) bei denen eine oder mehrere Stellen mit Nullen besetzt sind (Hanich et al., 2001; Freesemann, 2014; Fromme, 2017; Moser Opitz, 2013; Ross, 1989; Scherer, 2009) sowie (c) das Interpretieren von nicht vollständig gebündelten Darstellungen, wie 3T 84H 39E (Fromme, 2017; Hanich et al., 2001; Ladel & Kortenkamp, 2014; Moser Opitz, 2013; Ross, 1989). Diese Aufgaben werden oftmals über ein mechanisches Notieren der Zahlen von links nach rechts gelöst und lassen sich auf Verständnisdefizite des Prinzips der fortgesetzten Bündelung und des Stellenwertprinzips zurückführen. Zudem kommt es bei den Aufgaben zum Stellenwertprinzip zu Fehlern, die sich durch die Inversion zwischen Sprech- und Schreibweise der Zahlen erklären lassen (Fromme, 2017; Humbach, 2008).

Wenn Lernende Schwierigkeiten im Verständnis des Prinzips der fortgesetzten Bündelung offenbaren, scheint dies durch eine größtenteils ordinale Zahlauffassung sowie ein noch nicht ausgeprägtes Verständnis des Teil-Ganzes-Prinzips bedingt zu sein (Fromme, 2017; Moser Opitz, 2013; Resnick, 1983; Schulz, 2014).

Hürden zeigen sich außerdem bei Aufgaben, in denen gegebene Zahlen am Zahlenstrahl eingetragen oder abgelesen (2) werden sollen. Dies steht im Zusammenhang mit einer nicht eindeutigen Zuordbarkeit (Humbach, 2008; Moser Opitz, 2013; Ostad, 1997; Prediger et al., 2013).

Diese Schwierigkeiten scheinen in größeren Zahlenräumen (3) zuzunehmen. So steigen in der Untersuchung von Humbach (2008) die Fehlerquoten bei Aufgaben zum Prinzip der fortgesetzten Bündelung und Stellenwertprinzip sowie bei der Orientierung im Zahlenraum mit der Größe der Zahlen, sodass Schwierigkeiten vermehrt bei großen Zahlen auftreten (Humbach, 2008, S. 113ff). Diese steigenden Fehlerquoten lassen sich auf Verständnisprobleme beim Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems zurückführen, da die betreffenden Lernenden vermutlich noch keine Analogien zwischen verschiedenen Zahlenräumen erkannt haben.

*Schwierigkeiten beim Verständnis des Dezimalsystems im Bereich der Dezimalbrüche*

In verschiedenen Untersuchungen konnte eine Vielzahl an Fehlern und Fehlerstrategien identifiziert werden (z. B. Heckmann, 2006; Isotani et al., 2011; MacDonald, 2008; Sprenger, 2018), die beim Bearbeiten von Aufgaben mit Dezimalbrüchen auftreten. Lernende, die derartige (Fehler-)Strategien benutzen, haben keine oder nur eine geringe inhaltliche Vorstellung von Dezimalbrüchen aufgebaut, weshalb sie auf einer unverstandenen, syntaktischen Ebene operieren (Heckmann, 2006).

Schwierigkeiten im Verständnis des Dezimalsystems im Bereich der Dezimalbrüche zeigen sich (1) in der Vorstellung, dass das Komma Dezimalbrüche in zwei voneinander getrennte natürliche Zahlen trennt („Komma-trennt-Vorstellung“) (Bikner-Ahsbahs et al., 2017; Heckmann, 2006; Isotani et al., 2011; Sprenger, 2018; Steinle & Stacey, 2004) oder durch die Vorstellung, dass (2) das Komma einen Symmetriepunkt zwischen den Stellenwerten darstellt (MacDonald, 2008; Heckmann, 2006). Aufgrund der angenommenen Symmetrie wird die erste Dezimale als „Eintel“, die zweite als Zehntel usw. bezeichnet. Gemäß dieser Vorstellung werden die Beziehungen zwischen den Vor- und Nachkommastellen verändert: Einer wären infolge des zusätzlichen Stellenwertes nicht mehr das Zehnfache, sondern das Hundertfache eines Zehntels.

Eine weitere (3) Schwierigkeit zeigt sich im Umgang mit der Null (Heckmann, 2006; Sprenger, 2018; Steinle & Stacey, 2004), wobei die „Null-ist-nichts-Vorstellung“ (Heckmann, 2006), bei der Nullen einfach weggelassen werden (Bikner-Ahsbahs et al., 2017), sowie die „Kein-Komma-Strategie“, wenn das Komma ignoriert wird (Heckmann, 2006), unterschieden werden. In den Fällen ist die Funktion der Null als Platzhalter für nicht-besetzte Stellenwerte anscheinend noch nicht verstanden, weshalb Lernende oft nicht wissen, wann Nullen angehängt bzw. weggelassen werden dürfen und wann das Einfügen oder Weglassen von Nullen den Wert eines Dezimalbruchs ändert. Eine Schwierigkeit liegt hierbei darin, dass die stellenwertbelegende Funktion der Null zwar unabhängig vom Zahlbereich gilt, aber bei Dezimalbrüchen – im Gegensatz zu natürlichen Zahlen – Endstellen-Nullen beliebig angehängt oder gestrichen werden können, ohne den Wert der Zahl zu verändern. Manche Schülerinnen und Schüler scheinen jedoch die stellenwertbelegende Funktion der Null aus dem Bereich der natürlichen Zahlen insofern zu übergeneralisieren, als dass „Nullen, die zwischen dem Komma und der ersten Nachkommastelle, die durch eine von Null verschiedene Zahl belegt ist, stehen, [...] keine Bedeutung zugewiesen [wird]. Endstellen-Nullen wird hingegen eine stellenwertbelegende Funktion unterstellt (Sprenger, 2018, S. 242).

Viele dieser Schwierigkeiten und (Fehler-)Strategien im Umgang mit Dezimalbrüchen könnten durch ein nicht vollständig ausgebildetes Verständnis des Dezimalsystems im Bereich der natürlichen Zahlen erklärt werden. Da die Grundprinzipien des Dezimalsystems auch im Bereich der Dezimalbrüche gelten, könnten eventuell bei einem unvollständigen Verständnis die dezimalen Prinzipien und Eigenschaften nicht auf den Bereich der Dezimalbrüche transferiert und strukturgleich genutzt werden. Gleichzeitig erweist sich die Nähe der Dezimalbrüche zu natürlichen Zahlen als eine zentrale Fehlerquelle, wenn Lernende Eigenschaften des Dezimalsystems und dezimale Strukturen unreflektiert von natürlichen Zahlen übergeneralisieren und die notwendigen Umbrüche nicht vornehmen (Sprenger, 2018).

*Auf dezimale Beziehungen fokussierende Deutungen*

Neben der Analyse von Schwierigkeiten beim Aufbau des Stellenwertverständnisses ist die Deutung dezimaler Beziehungen Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung. Dabei wird untersucht, wie Schülerinnen und Schüler dezimale Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlen oder Repräsentationen einer Zahl herstellen, beschreiben und erklären. Sprenger (2018, S. 241) stellt fest, dass „Lernende [...] in sozialen Diskursen Urteile von anderen Gesprächsteilnehmenden [übernehmen], scheinbar ohne eigene Berechtigungen und Begründungen dafür eingehen zu können. Dies ist oftmals ein Hinweis darauf, dass inhaltliches Verständnis fehlt."

In einer Studie hat Schöttler (2019) interaktive Bedeutungsaushandlungen zwischen Lernenden bei der gemeinsamen Auseinandersetzung mit Lernumgebungen, die das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems fördern, untersucht. Der Fokus lag dabei auf den Deutungsprozessen der Schülerinnen und Schüler und es wurde analysiert, welches dezimale Verständnis die Lernenden in der Interaktion zeigen. Als Ergebnis dieser Studie legt Schöttler (2019) ein Modell vor, indem empirische und konzeptuelle Deutungen dezimaler Beziehungen unterschieden werden (vgl. auch Steinbring, 2005). Damit wird nicht auf typische Fehler fokussiert, sondern ein Werkzeug bereitgestellt, dass es erlaubt, die interaktiven Deutungen der Lernenden beschreibbar zu machen und genauer die Art und Weise des vorliegenden Verständnisses beschreibt. In der Darstellung der rekonstruierten Deutungen der Lernenden wird zunächst in Anlehnung an Steinbring (2005) zwischen empirischen und konzeptuellen Deutungen unterschieden; diese Deutungen werden in einem zweiten Schritt weiter ausdifferenziert. So lassen sich in empirischen Deutungen konkrete und empirisch-situierte Deutungen sowie in konzeptuellen Deutungen situiert-strukturelle und strukturelle Deutungen voneinander abgrenzen. Die Deutungen werden in Tabelle 1 beschrieben sowie an beispielhaften Aussagen von Kindern verdeutlicht. In den Beispielen werden jeweils die Zahlen 137 und 137 000 verglichen.

| | |
|---|---|
| **Empirische Deutung**<br>Fokussierung auf sichtbare dezimale Beziehungen zwischen empirischen Zahlen oder Ziffern und Verbalisierung von direkt mitteilbaren konkreten Auffälligkeiten oder Eigenschaften. Die Deutungen beziehen sich nur auf die konkreten Zahlen. | **Konzeptuelle Deutung**<br>Fokussierung auf zugrundeliegende dezimale Beziehungen, die in die konkreten Zahlen und Ziffern hineingedeutet werden. Die Deutungen gehen über einzelne empirische Zahlen hinaus und beziehen sich auf strukturelle Erkenntnisse. |
| • **Konkrete Deutung**<br>Vergleich von konkreten Zahlen und Verbalisierung von empirischen Fakten; die erkannten dezimalen (Zahl-)Beziehungen bleiben implizit.<br>‚Die Zahlen bestehen aus den gleichen Ziffern' [Welche Ziffern gleich sind und ob diese den gleichen Wert haben, wird nicht gesagt] | • **Situiert-strukturelle Deutung**<br>Erläuterung von zugrundeliegenden dezimalen Beziehungen über empirische Zahlen und Objekte sowie deren Eigenschaften. Trotz Loslösung vom Konkreten und Äußern von allgemeingültigeren Deutungen beziehen sich die Erkenntnisse auf die konkreten Zahlen und den situativen Kontext.<br>‚Deine Zahlen sind größer als meine. Immer um drei Nullen, also tausend. Deine Zahlen sind tausendmal größer als meine' [Die drei Nullen werden als empirische Objekte genutzt, um Unterschiede zwischen verschiedenen Zahlen zu erklären]. |
| • **Empirisch-situierte Deutung**<br>Beschreibung oder Erläuterung von sichtbaren Beziehungen zwischen verschiedenen empirischen Zahlen oder Ziffern mithilfe von direkt mitteilbaren Objekten, Merkmalen oder Auffälligkeiten.<br>‚In unseren Zahlen sind die gleichen Ziffern. Eins, drei und sieben' [Die gegebenen Ziffern werden genutzt, um sichtbare Gemeinsamkeiten zwischen den Zahlen zu verdeutlichen, die Bedeutung der Stellenwerteigenschaft wird nicht beachtet]. | • **Strukturelle Deutung**<br>Erläuterung von zugrundeliegenden dezimalen Beziehungen zwischen Zahlen über allgemeingültige Erklärungen von Eigenschaften des Dezimalsystems; genutzte Zahlenbeispiele haben einen exemplarischen Charakter und dienen zur Verdeutlichung der dezimalen Strukturen. Die Deutung ist allgemeingültig.<br>‚Aber auch wenn die Anfangszahlen gleich sind, haben sie eine andere Bedeutung. Bei mir sind die drei Anfangszahlen größer, also jede einzelne Zahl ist größer als die Zahl bei dir. Zum Beispiel steht deine eins für Hunderter, meine eins aber für Hunderttausender' [Die Aussage stellt eine allgemeingültige Erklärung der Stellenwerteigenschaft dar]. |

Tabelle 1: Auf dezimale Beziehungen fokussierende Deutungen (vgl. Schöttler, 2019, S. 306ff)

Als Ergebnis von Analysen konnte gezeigt werden, dass sich mithilfe der Deutungen Rückschlüsse auf das interaktiv gezeigte dezimale Verständnis der Kinder ziehen lassen (Schöttler, 2019): Dem folgend bleibt in konkreten Deutungen das dezimale Verständnis implizit, da keine Zusammenhänge beschrieben oder erläutert werden. Empirisch-situierte Deutungen sind dadurch gekennzeichnet, dass sich die Lernenden auf konkrete Zahlen beziehen und sichtbare Zusammenhänge verdeutlichen, wobei sie oftmals Regelwissen reproduzieren. Damit gelten die beschriebenen dezimalen Beziehungen nur für die konkreten Zahlen, sodass auch keine allgemeingültigen Erkenntnisse verbalisiert werden. Die Lernenden zeigen also ein eher regeltechnisches Wissen, ohne die zugrundeliegenden Bedeutungen zentraler Eigenschaften des Dezimalsystems zu beachten und dadurch ein inhaltliches Verständnis zu offenbaren.

Situiert-strukturelle Deutungen zeichnen sich dadurch aus, dass die Schülerinnen und Schüler einerseits relationale Beziehungen deuten und ihre Erkenntnisse über einzelne empirische Phänomene hinausgehen; sie jedoch gleichzeitig im situativen Kontext bleiben und sich ihre Entdeckungen auf die konkreten Zahlen beziehen. Dabei erläutern sie die zugrundeliegende Bedeutung der konstituierenden Eigenschaften des Dezimalsystems, die jedoch nicht verallgemeinert werden. Dadurch offenbaren die Lernenden ein inhaltliches Verständnis der jeweiligen Eigenschaften des Dezimalsystems. Strukturelle Deutungen sind durch allgemeingültige Erklärungen von Eigenschaften des Dezimalsystems gekennzeichnet und damit verbunden einer Loslösung von der konkreten Situation. Die gegebenen Erklärungen zeugen von einem elaborierten dezimalen Verständnis (Schöttler, 2019).

*Fazit zum Forschungsstand*

Die empirischen Untersuchungen offenbaren vielfältige Schwierigkeiten im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems und zeigen, dass einige Schülerinnen und Schüler oftmals über ein nicht adäquates inhaltliches Verständnis von natürlichen Zahlen bzw. von Dezimalbrüchen verfügt. Den betreffenden Lernenden fehlen damit wichtige Kompetenzen, um dem Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I folgen zu können, wodurch ihr mathematischer Lernprozess beeinträchtigt wird. Darüber hinaus ist das Verständnis des Dezimalsystems ein wichtiger Prädiktor für die Schulleistungen im Fach Mathematik (Fromme, 2017; Moeller et al., 2011; Moser Opitz, 2013; van de Walle et al., 2013). Deswegen ist es wichtig, die Schülerinnen und Schüler gezielt in ihrem dezimalen Stellenwertverständnis zu fördern – sowohl im Bereich der natürlichen Zahlen als auch der Dezimalbrüche.

Allerdings wird das Aufdecken von Defiziten im Verständnis des Dezimalsystems dadurch erschwert, dass Lernende Routineaufgaben, wie z. B. Zehnergruppen in der Stellenwerttafel eintragen oder Stellenwerte von Zahlen zu erkennen, oftmals problemlos ausführen können. Diese Fertigkeiten sind jedoch nicht unbedingt ein Indikator für ein inhaltliches Verständnis (Hart, 2009; Scherer, 2009; 2014). Vielmehr können die Routineaufgaben durch das Ausführen von gelernten Regeln oder Verfahren angewendet werden; ohne ein inhaltliches Verständnis aufgebaut haben zu müssen – im Sinne automatisierter Aufgaben. Daher kommen dem Einsatz von Aufgaben, die ein inhaltliches Verständnis anregen sowie der Diagnose und Förderung des dezimalen Stellenwertverständnisses im Mathematikunterricht eine besondere Relevanz zu (vgl. Scherer, 2009, S. 838).

In dem Zusammenhang fungiert das Modell der unterschiedlichen Deutungen als Werkzeug, mit dem interaktive Äußerungen im Hinblick auf ihr Verständnis des Dezimalsystems interpretiert werden können, sodass im Unterrichtsgespräch Rückschlüsse auf das dezimale Verständnis von Schülerinnen und Schülern gezogen werden können. Insgesamt lässt sich anhand der Forschungsergebnisse von Schöttler (2019) ableiten, dass, wenn Schülerinnen und Schüler im Unterricht konzeptuelle Deutungen verbalisieren, sie ein inhaltliches Verständnis des Dezimalsystems zeigen, während in empirischen Deutungen eher regeltechnisches Wissen zum Ausdruck gebracht wird.

## 3. Fragestellung und wissenschaftliches Vorgehen

Blickt man durch diese beiden Forschungsbrillen auf Situationen aus dem Mathematikunterricht, so werden Schwierigkeiten im Verständnis und Deutungen dezimaler Beziehungen sichtbar. Im weiteren Beitrag soll deshalb der Frage nachgegangen werden, wie die Erkenntnisse der Forschung helfen, das dezimale Verständnis sichtbar zu machen und anzuregen. Dabei konzentrieren wir uns in diesem Beitrag auf Gesprächssituationen aus Einstiegs- und Reflexionsphasen aus dem Mathematikunterricht. Hintergrund ist die Überzeugung, dass fundamentales, neues Wissen im Austausch mit anderen entsteht (Miller, 2006). Dazu zählen neben Interaktionsphasen zwischen Lernenden, z. B. in Phasen der kooperativen Bearbeitung (Schöttler, 2019; Häsel-Weide, 2016), und Gesprächen zwischen Lehrkräften und Lernenden auch Klassengespräche.

Im Mittelpunkt steht die Frage:

Wie können dezimale Deutungen von Lernenden in Klassengesprächssituationen aufgegriffen und im Klassengespräch ein vertieftes Verständnis angeregt werden?

Um Deutungen von Schülerinnen und Schülern sichtbar zu machen, eignen sich Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung, deren Ziel es ist, durch das ‚Verstehen' von Handlungen und Äußerungen in konkreten Unterrichtssituationen lokale Theorien – in diesem Fall zum dezimalen Verständnis – zu entwickeln (vgl. Jung & Schütte, 2016). Dabei wird davon ausgegangen, dass die Deutungen und Deutungszuschreibungen in der konkreten Unterrichtssituation zwischen den Beteiligten ausgehandelt werden. Mathematische Zeichen „haben zunächst für sich alleine keine Bedeutung, sie muss von den lernenden Kindern hergestellt werden" (Steinbring, 2000, S. 34). Schülerinnen und Schüler müssen also z. B. zunächst lernen, welche Bedeutung Plättchen in der Stellenwerttafel haben oder die Ziffern in einer Zahl.

Um diese zugänglich zu machen, werden videographierte und transkribierte Klassengesprächssituationen im Sinne der systematisch-extensionalen Analyse (Beck & Meier, 1994) betrachtet. Aus den Forschungsprojekten Dezimal (Schöttler, 2019), ZebrA (Häsel-Weide, 2016) und Igel-M (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2021) wurden Klassengesprächssituationen zum dezimalen Verständnis ausgewählt, die als „krisenhafte Episoden" (Beck & Maier, 1994, S. 51) bezeichnet werden können; mit anderen Worten Szenen, in denen die Interaktion bezogen auf das dezimale Verständnis nicht glatt verläuft und entsprechend unterschiedliche Deutungen sichtbar werden können. Die transkribierten Klassengespräche wurden dann turn-by-turn analysiert, und zwar mit Fokus auf die epistemologischen Deutungen der Lernenden (Steinbring, 2000).

## 4. Fallbeispiele und Ergebnisse

Wir zeigen das methodische Vorgehen und die Gewinnung von theoretischen Erkenntnissen nun zunächst anhand von zwei Fallbeispielen und leiten in einem abduktiven Prozess (Voigt, 2000) über die konkreten Beispiele hinausgehende Erkenntnisse ab.

### 4.1 Fallbeispiel „Deutungen zum Umgang mit der Null“

In einer sechsten Klasse stellen die Schüler Per und Sven in Partnerarbeit Zahlen mit vier Plättchen in der Stellenwerttafel dar, finden die additive Zerlegung und notieren die Zahlen (vgl. Abb. 1). Dabei notiert Per die Zahl 0,22 in den drei Zahldarstellungen (vgl. Abb. 3).

| E | z | h | t | Zerlegung | Zahl |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 0 | 0,2 + 0,02 | 0,22 |
| | | | | | |

Abbildung 3: rekonstruierter Ausschnitt aus der Bearbeitung von Per

Sven hinterfragt die Darstellung in der formal-symbolischen Schreibweise:

| | | |
|---|---|---|
| 22 | Sven | Warum schreibst du denn keine Null daran? (*zeigt auf die Zahlspalte*) Du hast hier in der Tabelle vier Felder, (*tippt nacheinander auf die Einer-, Zehntel-, Hundertstel- und Tausendstelspalte*) muss dann die Zahl nicht auch viel Zahlen lang sein? |
| 23 | Per | Nein, die Null muss man nicht schreiben. |
| 24 | Sven | Warum denn? |
| 25 | Per | Das ist eine Regel. Die Null darf man weglassen. |

Sven vermutet, dass die von Per notierte Zahl aus insgesamt vier Stellen bestehen muss und stellt eine Beziehung zwischen der Anzahl der Spalten der Stellenwerttafel und der Anzahl der Stellen der Zahl her. Dabei stützt er sich auf die gegebene Stellenwerttafel, die in dem Fall aus insgesamt vier Spalten besteht und vermutet ausgehend von dieser Eigenschaft der Stellenwerttafel, dass die Zahl in der formal-symbolischen Schreibweise ebenfalls vier Stellen umfassen muss. Er beschreibt also dezimale Beziehungen zwischen den beiden Zahldarstellungen über konkrete Auffälligkeiten. Möglicherweise wendet er zuvor gelerntes, formales Wissen zum Stellenwertprinzip an. Implizit könnte Sven den Umgang mit der Null aus dem Bereich der natürlichen Zahlen auf Dezimalbrüche übertragen und Endstellen-Nullen eine stellenwertbelegende Funktion unterstellen (vgl. Sprenger, 2018).

In seiner Reaktion auf Svens Frage offenbart Per ein konventionelles Regelwissen, ohne jedoch eine inhaltliche Erklärung zu geben, warum die Null weggelassen werden darf. Dementsprechend verbalisiert er empirische Fakten, die nicht weiter konkretisiert werden und offenbart somit eine konkrete Deutung (Schöttler, 2019). Aufgrund fehlender Ausführungen lassen sich anhand seiner beiden Aussagen keine Rückschlüsse auf sein Verständnis des Stellenwertprinzips ziehen und insbesondere, ob er weiß, warum die Null weggelassen werden darf, oder ob er lediglich die Regel, dass bei Dezimalbrüchen Endnullen gestrichen werden dürfen, reproduziert.

Im Klassengespräch am Ende der Stunde kommen abwechselnd Lernende an die Tafel und notieren dort verschiedene Zahlen in den drei Zahldarstellungen. Nachdem zunächst Sven die Zahl 220 und Per die Zahl 0,22 notiert haben, regt die Lehrkraft einen Vergleich der beiden Zahlen an.

| | | |
|---|---|---|
| 37 | Lehrkraft | Wenn ihr euch jetzt mal die Zahlen vergleicht, also die Zahlen von Sven und von Per. Fällt euch da was auf? |
| 38 | Sven | Die beiden Zahlen sind ähnlich. In beiden kommt die Zwei zweimal vor und die Null kommt in beiden vor. Einmal zweihundertzwanzig mit zwei, zwei, null. Und dann Pers Zahl mit null (.) Komma zwei und noch eine zwei. Was ich nur komisch finde, dass er keine Null ans Ende geschrieben hat. |
| 39 | Lehrkraft | Mmh. Warum denkst du, dass Per da noch eine Null schreiben muss? |
| 40 | Sven | Weil da in seiner Tabelle noch Platz ist, da wo t drüber steht. Da ich da kein Kreis reingetan habe, muss da eine Null stehen. |
| 41 | Lehrkraft | Per, warum hast du da keine Null ans Ende geschrieben? |
| 42 | Per | Weil da keine Null hin muss. Die kann man weglassen. |
| 43 | Lehrkraft | Wann darf man denn eine Null weglassen? Und wann muss man eine schreiben? |
| 44 | Per | Nullen darf man in einer Zahl nicht weglassen. Zum Beispiel wenn ich ein Hunderter und einen Einer habe, dann wäre das hundertundeins. Wenn ich die Null weglassen würde, wäre das elf und das |

| | | |
|---|---|---|
| | | wäre falsch. Deshalb muss ich die Null schreiben und darf die nicht weglassen. Weil, sonst ist die Zahl anders. Dann ist das nicht mehr ein Hunderter, sondern ein Zehner, nur weil ich die null weggemacht habe. |
| 45 | Lehrkraft | Ja, genau. Passt alle auf, das ist wichtig, was der Per gerade sagt. Kannst du das noch mal sagen, Per? |
| 46 | Per | Ja. Also, wenn man nullen einfach weglässt, ändert sich die Zahl, die wird dann kleiner. Ich kann jetzt die Zahl hundertundeins schreiben. |
| 47 | Lehrkraft | Schreib ruhig die Zahl in die Stellenwerttafel. |
| 48 | Per | (*notiert eine ‚1' in die Hunderter- und eine ‚1' in die Einerspalte der Stellenwerttafel*) Hier habe ich einen Hunderter und einen Einer, aber keinen Zehner, ich habe keinen Zehner und könnte daher hier eine null schreiben. (*notiert in die Zehnerspalte der Stellenwerttafel eine ‚0'*) Wenn ich jetzt die Null weglasse, hätte ich nicht mehr hundertundeins, sondern elf. Dann wäre diese Eins (*zeigt auf die 1 in der Hunderterspalte*) nicht mehr ein Hunderter, sondern ein Zehner. Deswegen darf man die Null nicht weglassen. Dann wird die Zahl falsch. |
| 49 | Lehrkraft | Richtig. Gut erklärt. |

In seinem Vergleich beschreibt Sven sichtbare dezimale Beziehungen zwischen den Zahlen 220 und 0,22 über die empirische Gleichheit der Ziffern (Z. 38). Er erkennt und verbalisiert also eine Gemeinsamkeit zwischen den beiden Zahlen. Dabei betrachtet er in seiner empirisch-situierten Deutung die konkreten Zahlenwerte der Ziffern unabhängig von deren Position und somit des jeweiligen Stellenwerts der Ziffern. Seine Antwort auf die Frage der Lehrkraft ergänzt er um seine Frage aus dem Gespräch mit Per, die anscheinend noch nicht zu seiner Zufriedenheit geklärt ist. Er scheint also die Gelegenheit zu nutzen, sie im Klassengespräch noch einmal zu stellen (Z. 40). Dabei stellt er mit seiner Formulierung „Was ich nur komisch finde, dass es keine Null ans Ende geschrieben hat" nicht die Korrektheit der Notation in Frage, sondern äußert seine Irritation. Zur Verdeutlichung seiner Frage bezieht er sich auf die Tausendstel-Spalte der Stellenwerttafel. Da die Tausendstel-Stelle nicht belegt ist, müsse eine Null als letzte Stelle notiert werden. Auch in dieser Aussage fokussiert er sich auf die konkrete Anzahl der Spalten der gegebenen Stellenwerttafel. In seiner Deutung zeigt Sven ein regeltechnisches, formales Wissen zum Stellenwertprinzip, indem er eventuell zuvor gelernte Wissenselemente zum Umgang mit der Null reproduziert sowie sich nur auf die Zahlenwerte von Ziffern bezieht, ohne die zugrundeliegende Bedeutung der Stellenwerteigenschaft zu beachten.

Gefragt nach einer Begründung erläutert Per zunächst, dass an der Tausendstel-Stelle keine Null notiert werden müsse und greift damit erneut auf Regelwissen zurück. Anschließend wird er durch die Nachfrage der Lehrkraft, wann Nullen weggelassen und wann diese notiert werden müssen, zu einer strukturellen Deutung angeregt. Mithilfe des selbstgewählten konkreten Zahlenbeispiels 101 erklärt er, dass sich diese Zahl aus einem Hunderter und einem Einer zusammensetzt. Würde die Null, die angibt, dass die Zehnerstelle nicht besetzt ist, weggelassen, würde sich der Wert der Zahl ändern. Ohne die Null würde aus dem Hunderter ein Zehner, weshalb Nullen innerhalb einer Zahldarstellung nicht einfach weggelassen werden dürfen. Die Null zeigt an, dass an einer bestimmten Position der Zahldarstellung eine Stelle nicht besetzt ist, sodass Per ihr eine stellenwertbelegende Funktion zuweist (vgl. Fromme, 2017). Er deutet also die einzelnen Ziffern stellengerecht und weist den einzelnen Ziffern in Abhängigkeit ihrer Position innerhalb der Zahldarstellung ihren spezifischen Wert zu (Stellenwerteigenschaft). Obwohl er seine Deutung an einem konkreten Zahlenbeispiel festmacht, löst er sich von der konkreten Situation und erklärt allgemeingültige dezimale Beziehungen: Seine Aussage, „wenn man Nullen einfach weglässt, ändert sich die Zahl, die Zahl wird kleiner“, gilt für alle Zahlen, die sich in der Dezimalschreibweise darstellen lassen; zumindest für Nullen innerhalb der Zahldarstellung, aber nicht für Endnullen bei Dezimalbrüchen. Insgesamt zeigt Per damit ein inhaltliches Verständnis der Stellenwerteigenschaft, insbesondere auch von der besonderen Rolle der Null als Platzhalter für nicht-besetzte Stellenwerte.

Die geäußerte strukturelle Deutung wurde in dem Gespräch von der Lehrkraft angeregt. Während Per in der vorangegangenen Interaktion mit Sven noch einfach auf die Regel hinweisen konnte, ist er nun durch das Infragestellen der Regel sowie der Einforderung einer Begründung der Lehrkraft, die auf eine Loslösung von dem situativen Kontext sowie einer Deutung zugrundeliegender dezimaler Beziehungen abzielt, herausgefordert, eine inhaltliche Erklärung zu geben. Damit zeigt sich in der Situation die besondere Bedeutung von Lehrkräften, die durch gezielte Fragen oder Anregungen konzeptuelle Deutungen initiieren können. Obwohl durch Svens Frage in der Partnerarbeit ein potenzieller Auslöser (Schöttler, 2019, S. 287ff) für eine inhaltliche Erklärung entsteht, wird erst in der durch die Lehrkraft moderierten Interaktion eine auf inhaltliches Verständnis zielende Begründung hervorgebracht, während in der Partnerarbeit regelhaft argumentiert wird.

Allerdings wird in der Interaktion mit der Lehrkraft die Ausgangsfrage, warum die Null am Ende eines Dezimalbruchs weggelassen werden darf, nicht beantwortet. Per bezieht sich nur auf den zweiten Teil der Frage der Lehrkraft, die die Antwort akzeptiert und lobt, ohne erneut die Frage zu stellen, wann Nullen weggelassen werden dürfen. Svens Frage bleibt somit letztlich unbeantwortet und die Gelegenheit, auf Unterschiede zwischen natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen einzugehen und die stellenwertbelegende Bedeutung der Null weiter zu verdeutlichen, wird nicht genutzt. Dennoch wird in dieser Interaktion mit dem Umgang mit der Null ein Aspekt des dezimalen Stellenwertverständnisses aufgegriffen, der vielen Lernenden Schwierigkeiten bereitet (vgl. Kap. 2.2), sodass die Chance besteht, dass die Schülerinnen und Schüler wesentliche Verstehensinhalte wiederholen. Durch den ausschließlich ausgehandelten Fall der Bedeutung der Endnullen bei den natürlichen Zahlen besteht allerdings auch die Gefahr, dass dies als Regel auf die Dezimalbrüche übertragen wird.

### 4.2 Fallbeispiel „Mehrdeutige Zahlenkarten auf dem leeren Zahlenstrahl“

In dem Klassengespräch in einer zweiten Klasse hängen die Kinder Zahlenkarten mit Lücken ( 1_, 1_, 1_, _5, _5, 4_, 4_ ) an einen fast leeren Zahlenstrahl, der allerdings durch die 0 und 100 geeicht ist (Abb. 2 & 4). Bei diesem Klassengespräch handelt sich um die Reflexionsphase, nachdem die Kinder zuvor in Paaren Kartensätze mit Zahlenfolgen an leeren Zahlenstrahlen zugeordnet hatten (vgl. Häsel-Weide et al., 2017). Im Vorfeld der Episode sind bereits zwei Karten am Zahlenstrahl positioniert und interpretiert worden. Durch diese Aufgabenstellung werden zwei typische Problembereiche des dezimalen Stellenwertverständnisses aufgegriffen: Einerseits müssen Zahlen an einem fast leeren Zahlenstrahl eingetragen werden, sodass die Zahlen nicht eindeutig zuzuordnen sind. Andererseits zielt durch die Mehrdeutigkeit der Zahlenkarten die Aufgabe auch auf das Verständnis des Stellenwertprinzips ab (vgl. Kap. 2.2).

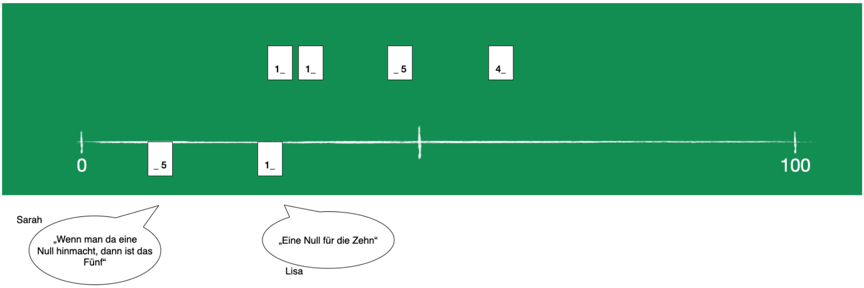



Abbildung 4: Rekonstruiertes Tafelbild zu Beginn der Szene

Die Lehrkraft hinterfragt nun die Deutungen der Kinder: „Mhm, jetzt hat ja Sarah gesagt, da ist die Fünf. Dann ist da die Zehn (*zeigt auf die Karten am Zahlenstrahl)*. Und jetzt gucken wir mal, wo die Hundert ist (*zeigt die Hundert am Zahlenstrahl und schaut zu Lisa, die noch an der Tafel steht)*. Dann geh mal einen Schritt zurück. Kann das sein?“

| | | |
|---|---|---|
| 23 | Lehrkraft | Justus, warum kann das nicht sein? |
| 24 | Justus | Weil die Mitte immer, weil die Mitte dann immer die Fünfzig ist. Die Mitte (*kommt an die Tafel),* die Mitte, uäh (*drückt die Tafel am Ablagebrett runter).* |
| 25 | Lehrkraft | Mach einfach mal nen Strich mit der Kreide. |

Nachdem Lisa sich ohne weitere Äußerungen hingesetzt hat, wird Justus von der Lehrkraft aufgerufen und aufgefordert, zu erläutern, warum die angehängten Karten nicht stimmen können. Mit der Umformulierung der Frage von „Kann das sein?“ zu „Warum kann das nicht sein?“ ist die Begründungsrichtung gesetzt.

Zur Erläuterung hält Justus seine Handkante ungefähr mittig an den Zahlenstrahl (die Lehrkraft macht an dieser Stelle einen Strich mit der Kreide) und begründet zunächst, dass die Mitte immer die Fünfzig ist. Dabei deutet die Formulierung „immer“ darauf hin, dass er hier Wissen abruft und die Beziehung zwischen der Mitte und dem gesamten Zahlenstrahl nicht in dieser Situation entwickelt.

| | | |
|---|---|---|
| 35 | Justus | So, wenn da die Zehn ist (zeigt auf die Karte 1_), wo soll dann die Zwanzig sein (zeigt auf den eingezeichneten Strich)? Die Zwanzig, ne, die Fünfzehn müsste ja dann hier sein (zeigt auf den eingezeichneten Strich in der Mitte des Zahlenstrahls). Aber da müsste ja die <u>Fünfzig</u> hin. |
| 36 | Lehrkraft | Also wärst du nicht damit einverstanden? |
| 37 | Justus | Ne, ich würde nicht damit einverstanden sein (*verschiebt die Karte _5 am Zahlenstrahl weiter nach links)*. Ich würde einfach dann die [Neu]. Wenn das hier ist und das (..) (*verschiebt die 1_ weiter nach links)* hier ist, dann kann man das nämlich so machen. |
| 38 | Lehrkraft | Mmh. |

In der weiteren Episode nimmt Justus im Sinne des positionsorientierten Verständnisses unterschiedliche Zahlbeziehungen in den Blick. Er beachtet einerseits die empirisch-situierten Deutungen seiner Mitschülerinnen, die den mehrdeutigen Zahlenkarten eine eindeutige Zahl zugewiesen haben und diese unter Beachtung von passenden Abständen bezogen auf ausgewählte Zahlen positioniert haben. Dabei stellt er weder die konkrete Deutung der Zahlen in Frage noch den gewählten Abstand zwischen den beiden Zahlen, aber argumentiert, dass die gewählte Positionierung in Bezug auf die gesetzten Bezugspunkte 0 und 100 nicht passend ist. Damit greift er die von der Lehrkraft als wesentlich miteinzubeziehenden Aspekte auf.

In seiner Argumentation setzt Justus zunächst einen weiteren Bezugspunkt, 50 als Mitte zwischen 0 und 100, und argumentiert, dass bei einem Beibehalten der aktuell gewählten Abstände zwischen 0 und 5 sowie 5 und 10, die 15 an der Position notiert werden müsste, an der aber über die Eichung der Zahlenstrahls durch die Vorgaben von 0 und 100, die 50 stehen müsste. Um dieses Problem zu lösen, verringert er die Abstände zwischen 0 und 5 sowie 5 und 10, so dass die Deutung der Karten zur Eichung des Zahlenstrahls passt.

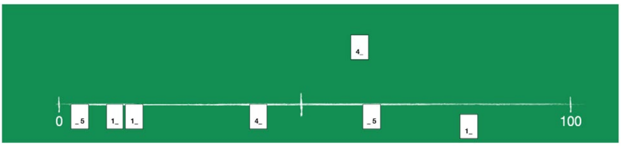
Anregt durch das In-Frage-Stellen der vorgenommenen Deutungen durch die Lehrkraft bringt Justus eine situiert-strukturelle Deutung vor. Er erläutert zugrundeliegende Zahlbeziehungen, wobei seine Argumentation an den konkreten Zahlen vorgenommen wird, aber die genutzten, konkreten Zahlen, z. B. „Fünfzehn“, einen exemplarischen Charakter haben, er jedoch grundsätzlich auf die relationalen Zusammenhänge zielt. So macht er deutlich, dass bei der Positionierung sowohl die Beziehung bezogen auf Start- und Endpunkt des Zahlenstrahls als auch bezogen auf einzelne Folgen in Übereinstimmung gebracht werden muss, um der dekadischen Struktur der Zahlen gerecht zu werden.

Nachdem im weiteren Klassengespräch die 4_ in der Interpretation als „Vierzig“ und die „_5“ als „Fünfundfünfzig“ positioniert wurden, kommt Ben nach vorne und positioniert die Karte „1_“ rechts neben die bereits hängende Karte „1_“.

| | | |
|---|---|---|
| 42 | Lehrkraft | Was soll das sein? |
| 43 | Ben | (Dreht den Kopf in Richtung Sitzhalbkreis) Die Elf |
| 44 | Lehrkraft | Elf |
| 45 | Ben | (Holt die letzte Karte 1_ und hängt sie rechts neben die anderen Karten 1_ an den Zahlenstrahl) |
| 46 | Schüler*in | Zwölf |
| 47 | Ben | Zwölf |

…

| | | |
|---|---|---|
| 51 | Lehrkraft | Könnte diese Karte, diese Karte, diese, die der Ben gerade genommen hat auch hier sein (*hängt die Karte 1_ zwischen die als Fünfundfünfzig gedeutete _5 und die 100*) |




| | | |
|---|---|---|
| 53 | Lehrkraft | Louis, warum kann die da nicht sein? |
| 54 | Louis | Weil guck mal da muss ja irgendwas mit der Zehn sein (nimmt die Karte „1_“ ab). und da sind ja mit der Achtzig Neunzig und Siebzig (*tippt mit dem Finger mehrmals auf den Zahlenstrahl in die Mitte zwischen dem Strich für die 50 und der 100*). Also muss die irgendwo wo noch was mit der zehn zu tun hat. Da muss schon wieder was mit der vierzig sein (hält die Karte neben die Karte 4_“). Weil die Vier vorne ist. |
| 55 | Lehrkraft | Mmh. |
| 56 | Louis | Und deswegen kann die da nicht hin (*hält die Einerkarte in seiner Hand wieder an die Stelle, wo der Lehrkraft sie hingehangen hatte und schaut nach rechts*), weil sonst müsste die als wenn hinten sein. # Weil dann könnten alle Zehner nach vorne |

Ben nimmt in seiner Deutung der Karten eine korrekte, konkrete Deutung vor; inwieweit er über eine vertiefte Einsicht in das Stellenwertsystem verfügt, wird hieran jedoch nicht sichtbar. Die Lehrkraft hinterfragt die Deutung nicht und fordert auch keine Begründung ein, sondern stellt eine alternative Deutung zur Diskussion. Die Frage selbst könnte durch eine empirische Deutung beantwortet werden, indem z. B. formuliert würde, dass die Karte da nicht positioniert werden kann, weil an dieser Stelle keine Zahlen mit einer 1 vorne positioniert werden können. Louis antwortet jedoch konzeptuell, indem er „irgendetwas mit" sagt und somit eine Verallgemeinerung andeutet (Akinwunmi, 2012). Zudem wird deutlich, dass er die Zahlenkarte stellengerecht deutet, da er von „mit zehn" spricht und damit die 1 an der Zehnerstelle gemäß ihrer Stellenwerteigenschaft deutet. Sein Verständnis der Stellenwerteigenschaft und sein positionsorientiertes Verständnis zeigt sich in seiner Argumentation, in der er sagt, dass die Karte 1_ nicht im Bereich des letzten Viertels des Zahlenstrahls mit Endpunkt 100 positioniert werden kann, da dort die größeren Zahlen mit 70, 80 oder 90 positioniert sind und die 1 an der entsprechenden Stelle bedeutet, dass die Mehrdeutigkeit insofern eingeschränkt ist, dass hier keine Zahl im Zehnerbereich hineingesehen werden kann. Anders wäre nur möglich, wenn die 1 an einer anderen Stelle stünde, „weil sonst müsste die 1 wenn hinten sein".

Beide konzeptuellen Deutungen werden von den Kindern in den Situationen hervorgebracht, in denen es nicht um das reine Positionieren einer mehrdeutigen Karte am leeren Zahlenstrahl geht. Über die Positionierung hinaus werden Erläuterungen eingefordert, die die Kinder dazu herausfordern, den konkreten, situativen Kontext zu verlassen, so dass dann auch allgemeine Deutungen bezogen auf dezimale Strukturen möglich werden, während ohne diese Anregungen von außen die konkrete Aufgabestellung allein nicht dazu führt, dass die zugrundeliegenden Strukturen fokussiert werden (Schöttler, 2019, S. 264). Als Anlässe können in dieser Szene die Fragen der Lehrkraft ausgemacht werden. Im ersten Fall werden dabei die tatsächlich vorgenommenen Positionierungen der Kinder fraglich gemacht, in der zweiten Situation wird gezielt eine Situation geschaffen und eine vorgenommene Deutung verändert, die eine Argumentation und zur Verbalisierung einer konzeptuellen Deutung initiiert.

*Vergleichende Betrachtungen und Schlussfolgerungen*

Die beiden Fallbeispiele geben einen Einblick, wie Schülerinnen und Schüler interaktiv dezimale Beziehungen deuten und aushandeln. Dabei sind die Lernenden in beiden Szenen herausgefordert, abstrakte dezimale Beziehungen zu erkennen sowie in Worte zu fassen: einerseits bei der Frage, wann Nullen in der formal-symbolischen Schreibweise notiert, wann sie weggelassen werden dürfen und andererseits bei der Positionierung von mehrdeutigen Zahlenkarten an einem fast leeren Zahlenstrahl. Damit werden Aspekte des dezimalen Stellenwertverständnisses aufgegriffen, die in der Forschung als Problembereiche identifiziert worden sind (vgl. Kap. 2.2). Durch die Rekonstruktion der Deutungen ist es möglich, in Klassengesprächen Rückschlüsse auf das dezimale Verständnis zu ziehen. Damit erweist sich das Modell von Schöttler (2019) als hilfreich, um im Unterricht diagnosegeleitet das dezimale Verständnis von Schülerinnen und Schülern zu erfassen.

In beiden Unterrichtsszenen argumentieren die Schülerinnen und Schüler zunächst auf einer empirischen Ebene und beschreiben konkrete Zahlbeziehungen. Im Hinblick auf das in dem Zusammenhang gezeigte Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems lässt sich festhalten, dass die Schülerinnen und Schüler hierbei ein formales, regelgeleitetes Wissen zeigen. Im weiteren Verlauf der Klassengespräche werden von einigen Lernenden zugrundeliegende, allgemeine Zahlbeziehungen in den Blick genommen und konzeptuelle Deutungen generiert. In diesen Deutungen zeigt sich ein elaboriertes Verständnis zentraler Eigenschaften des Dezimalsystems. Dementsprechend haben die Schülerinnen und Schüler durch das Klassengespräch die Chance, ein inhaltliches Verständnis zu Aspekten aufzubauen und zu teilen, die vielen Kindern Schwierigkeiten bereiten.

Allerdings führen Interaktionen nicht per se zu einer Aushandlung zugrundeliegender dezimaler Beziehungen sowie zu einer Hervorbringung konzeptueller Deutungen (Nührenbörger, 2009). Vielmehr konnten konzeptuelle Deutungen vorwiegend in den Situationen rekonstruiert werden, in denen die Lehrkraft durch geeignete Fragen und Impulse Anlässe für konzeptuelle Deutungen erzeugt hat, in denen ein vertieftes dezimales Verständnis angeregt und geteilt wurde. Ähnliches zeigt sich auch in Studien zur Initiierung von Argumentationsprozessen (Schwarzkopf, 2000, Gellert & Steinbring, 2012), bei denen Impulse durch die Lehrkraft in Klassengesprächen als typischer Ausgangspunkt für Argumentationen erkannt wurde.

Insgesamt können in den analysierten Szenen folgende Anlässe unterschieden werden, die auf ein vertieftes, inhaltliches Verständnis abzielen, die jedoch nicht trennscharf sind:

- Einfordern von (allgemeinen) Begründungen: Während Per in der Interaktion mit Sven noch auf die Regel verweisen kann, fordert die Lehrkraft ihn im Klassengespräch auf, allgemein zu begründen, wann Nullen notiert und wann sie weggelassen werden dürfen. Damit wird eine Loslösung vom situativen Kontext sowie eine Fokussierung auf zugrundeliegende Beziehungen angestrebt. Dabei werden nicht regelhafte, sondern inhaltliche Argumente verlangt.
- Hinterfragen von Ergebnissen bzw. Regeln: Im Klassengespräch der zweiten Klasse stellt die Lehrkraft die von Kindern vorgenommene Positionierung der 5 und der 10 am Zahlenstrahl in Frage. Dies führt im Anschluss dazu, dass die Kinder zugrundeliegende Zahlbeziehungen deuten, und erklären, warum die Ergebnisse in dem Fall nicht stimmen.
- Alternative Deutungen zur Diskussion stellen: In der Szene aus dem zweiten Schuljahr hängt die Lehrkraft die Zahlenkarte 1_ zwischen die 55 und 100 und fragt, ob die Zahlenkarte auch an der Position am Zahlenstrahl platziert werden könne. Diese alternative Deutung wird von Louis aufgegriffen und er erklärt, warum die Deutung nicht zutreffend ist. Dabei gelingt es Louis, allgemeine Zahlbeziehungen auf dem Zahlenstrahl zu erläutern.

Das Einfordern von Erklärungen und Begründungen sowie das diskursive Aushandeln dezimaler Beziehungen dient der Förderung der prozessbezogenen Kompetenz des Argumentierens und dem inhaltlichen Verständnis. Diese Erkenntnis ist weder von der grundsätzlichen Überlegung (vgl. Winter, 1975) noch vom empirischen Forschungsstand neu (vgl. z. B. Brunner, 2014; Schwarzkopf, 2003; Nührenbörger & Schwarzkopf, 2015; Gellert & Steinbring, 2012, 2013; Wood, 1998), kann aber an obigen Beispielen am zentralen Gegenstand „Stellenwertverständnis" in Klassengesprächssituationen in ihrer Bedeutung dargelegt werden.

Dabei führen die im Klassengespräch geführten Interaktionen nicht zwangsläufig zu strukturellen Deutungen und müssen es auch nicht (Schwarzkopf, 2003). Auch in empirisch konkreten Deutungen zeigt sich dezimales Verständnis, aber eben bezogen auf konkrete empirische Objekte. Lehrkräften kann das Wissen um die Deutungstypen helfen, das gezeigte Verständnis genauer einzuschätzen und in den Interaktionen allgemeine Deutungen anzuregen sowie eine reine Reproduktion von Regeln oder empirischen Fakten immer wieder zu hinterfragen und zu ergänzen.

Die Ergebnisse aus den Analysen der Klassengesprächssituationen verdeutlichen insbesondere die Wichtigkeit der Impulse durch Lehrkräfte für die Hervorbringung konzeptueller Deutungen (Brunner, 2014, Fetzer, 2011; Krummheuer, 2003; Schwarzkopf 2003). Lehrkräfte können durch gezielte struktur-fokussierende Fragen und Anregungen die Schülerinnen und Schüler zu Neu- oder Umdeutungen mathematischer Beziehungen animieren (vgl. Steinbring, 2005). In dem Zusammenhang ist es wichtig darauf achten, dass tatsächlich zugrundeliegende Beziehungen fokussiert und erläutert werden. Bei einer rein empirischen Betrachtung dezimaler Beziehungen werden eher nur oberflächliche Aspekte fokussiert, die nur für die konkreten Zahlenbeispiele gelten sowie ein regeltechnisches Wissen reproduziert; z. B. wenn die Zahlen 220 und 0,22 ausschließlich auf einer Ziffernebene miteinander verglichen werden und verbalisiert wird, dass in beiden Zahlen die Ziffern null und zwei vorkommen. Allgemeingültige Erkenntnisse und damit ein inhaltliches Verständnis lassen sich nur in konzeptuellen Deutungen rekonstruieren, sodass es im Klassengespräch wichtig ist, genau solche Deutungen anzuregen und gemeinsam zentrale Eigenschaften des Dezimalsystem zu fokussieren; Beispielsweise kann die Stellenwerteigenschaft in den Blick genommen werden, wenn gemeinsam überlegt wird, wann Nullen in natürlichen Zahlen und in Dezimalbrüchen weggelassen werden dürfen und wann dies nicht erlaubt ist, sodass die stellenwertbelegende Funktion der Null deutlich wird.

Auch wenn in diesem Beitrag auf Klassengespräche fokussiert wurde, machen sie nur einen geringen Teil der (produktiven) Interaktionssituationen im Unterricht aus. Aushandlungsprozesse finden vielfältig und produktiv in Interaktionen zwischen Lernenden (Schöttler, 2019) und in (Einzel- und Kleingruppen-)Gesprächen zwischen Lehrkraft und Lernenden statt. Sie werden angeregt durch Aufgaben, die konzeptuelles Verständnis anregen und zu produktiven Irritationen (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2019) führen und die Lernenden durch ihr Design und ihre methodische Umsetzung explizit zum inhaltlichen Austausch anregen (Häsel-Weide, 2016).

## 5. Diskussion und Konsequenzen

Was folgt nun aus der Darstellung des Forschungsstandes und der Analyse der Deutungen dezimalen Verständnisses in Klassengesprächssituationen?

Einerseits zeigt sich, dass sich der Forschungsstand zum dezimalen Verständnis von Lernenden in den letzten Jahren deutlich erweitert hat. Die mathematikdidaktische Forschung hat nicht nur gezeigt, dass dezimales Verständnis von grundlegender Bedeutung für mathematisches Lernen ist, sondern auch typische Hürden des Verstehens beschrieben und Werkzeuge entwickelt, dieses zu erheben und zu beschreibbar zu machen (vgl. Kap. 2). Anderseits wurden für die Unterrichtspraxis Lernumgebungen und Fördermaterialien entwickelt, die in diesem Beitrag nur durch die Interaktion im Klassengespräch implizit Erwähnung fanden[1]

[1] Lernumgebungen und Fördermaterialien zum Dezimalverständnis, die insbesondere auf das Verstehen und die Interaktion fokussieren sowie für den inklusiven Unterricht geeignet sind, finden sich z. B.
Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2013). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker, & M. Lassek (Eds.), *Individuell fördern - Kompetenzen stärken ab Klasse 3. Heft 2.* Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule e. V.

und die Deutungen der Lernenden über diese Aufgaben in der Interaktion untereinander und in Klassengesprächssituationen untersucht.

Dabei wurde noch einmal fokussiert, und zwar auf die Klassengesprächssituationen unter Moderation der Lehrkraft und dazu zwei Szenen vorgestellt und diskutiert, andere Analysen blieben unerwähnt. Dies entspricht einem qualitativen Vorgehen der interpretativen Unterrichtsforschung, in dem es nicht um das Testen und die Allgemeingültigkeit von Hypothesen geht, sondern in dem durch vertiefte exemplarische Deutungen neue (theoretische) Erkenntnisse generiert werden, die mit bestehenden Forschungsergebnissen einerseits und theoretischen Überlegungen andererseits abgeglichen werden (Bikner-Ahsbahs, 2003, S. 210). Diese sind dabei natürlich nicht nur an den hier dargestellten Episoden gewonnen, gleichwohl haben sie erkenntnisgenerierenden Status (Voigt, 2000).

Produktiven Charakter im Sinne der potenziellen Initiierung konzeptueller Deutungen zum Stellenwertverständnis kommen dem Einfordern von Begründungen, Hinterfragen von Ergebnissen bzw. Regeln und alternativen Deutungen zu. Diese haben das Potential, konzeptuelle dezimale Beziehungen und fokussierende Deutungen anzuregen, die dann im Unterrichtsgespräch geteilt sind. Es scheint auch zielführend zu sein, dass in Klassengesprächen explizit die in der Forschung erfassten Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Verständnis des Dezimalsystems thematisiert werden. Durch das gezielte Aufgreifen und

---

Mosandl, C., & Nührenbörger, M. (2014). Stellenwerte verstehen. In: C. Selter, S. Prediger, M. Nührenbörger, & S. Hußmann (Eds.). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen Natürliche Zahlen* (pp. 21-66). Berlin: Cornelsen.

Sprenger, L., & Hußmann, S. (2014). Dezimalzahlverständnis. In: C. Selter, S. Prediger, M. Nührenbörger, & S. Hußmann (Eds.). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Brüche, Prozente und Dezimalzahlen* (pp. 101-155). Berlin: Cornelsen.

Schöttler, C. (2019). *Deutung dezimaler Beziehungen. Epistemologische und partizipatorische Analysen von dyadischen Interaktionen im inklusiven Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer.

das begründete Deuten zugrundeliegender Beziehungen kann hier der Aufbau eines inhaltlichen Verständnisses unterstützt werden.

Die Allgemeinheit der Anlässe kann dabei zugleich als Vorteil und Nachteil verstanden werden. Positiv erscheint, dass diese Anlässe nicht auf die Anregung dezimalen Verständnisses beschränkt scheinen, sondern sich mit den Erkenntnissen anderer Studien decken (Schwarzkopf, 2003; Gellert & Steinbring, 2013) und damit als allgemeine Ermutigung für Lehrkräften verstanden werden können, immer wieder inhaltliche Begründungen einzufordern und anzuregen (Schwarzkopf, 2000). Als nachteilig an den allgemein formulierten Anlässen kann aber auch genau diese Allgemeinheit angesehen werden. Da die individuellen Deutungen der Schülerinnen und Schüler sich immer auch auf den konkreten Gegenstand beziehen, ist selbst beim gemeinsamen Gegenstand Stellenwertsystem keine konkrete Auflistung von Fragen oder Anlässen zu formulieren.

Die Deutung der Aussagen und eine Einschätzung, ob es sich hierbei um eine empirisch-situierte oder konzeptuelle Deutung handelt und was genau hinterfragt werden könnte bzw. welche alternative Deutung vorgebracht werden kann, kann eben nicht unabhängig von der konkreten Lernsituation und den konkreten Äußerungen der Kinder formuliert werden. Mit anderen Worten, die Konkretisierung kann nur von den Lehrkräften in den aktuellen Unterrichtssituationen vorgenommen werden. Mathematikdidaktische Forschung kann lediglich durch die Spezifizierung des Gegenstandes sowie das exemplarische Aufzeigen von Deutungen einen Beitrag zur Sensibilisierung und zur Erweiterung des fachdidaktischen Hintergrundwissens im Sinne der Professionalisierung von Lehrkräften beitragen (Prediger et al., 2017).

## Literaturverzeichnis

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Beck, C., & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier, & J. Voigt (Eds.), *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (pp. 43-76). Köln: Aulis.

Bikner-Ahsbahs, A. (2003). Empirisch begründete Idealtypenbildung. Ein methodisches Prinzip zur Theoriekonstruktion in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung. *ZDM, 35*(5), 208-222.

Bikner-Ahsbahs, A., Schäfer, I., & Dygas, R. (2017). Lernschwierigkeiten im Umgang mit Dezimalbrüchen: ein situativer Blick. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38*(2), 239-262.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Cawley, J., Parmar, R., Lucas-Fusco, L., Kilian, J., & Foley, T. (2007). Place value and mathematics for students with mild disabilities. Data and suggested practices. *Learning disabilities: A Contemporary Journal, 5*(1), 21-39.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32* (1), 27-51.

Freesemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen*. Wiesbaden: Springer.

Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen*. Wiesbaden: Springer.

Gaidoschik, M. (2009). Kein „Zahlenraum“ ohne Stellenwertdenken. *Grundschule Mathematik, 20*(1), 12-15.

Gaidoschik, M. (2015). Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des "Hunderterraums". *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*(1), 163-190.

Gellert, A. & Steinbring, H. (2012). Dispute in Mathematical Classroom Discourse - "No go" or Chance for Fundamental Learning? *Orbis scholae, 6*(2), 103-118.

Gellert, A., & Steinbring, H. (2013). Students constructing meaning for the number line in small-group discussions: negotiation of essential epistemological issues of visual representations. *ZDM, 46*, 15-27.

Hanich, L., Jordan, N., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. *Journal of Educational Psychology, 93*(3), 615-626.

Hart, K. (2009). Why do we expect so much? In J. Novotná, & H. Moraova (Eds.), SEMT 2009. *International Symposium Elementary Maths Teaching* (pp. 24-31). Prague: Charles University.

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer.

Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2013). Individuell fördern - Kompetenzen stärken. Fördern im Mathematikunterricht Klasse 3&4. In H. Bartnitzky, U. Hecker, & M. Lassek (Eds.), *Individuell fördern - Kompetenzen stärken (Band 135)*. Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2021). Inklusive Praktiken im Mathematikunterricht. Empirische Analysen von Unterrichtsdiskursen in Einführungsphasen. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 14, 49-65.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2017). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen*. Berlin: Dr. Köster.

Isotani, S., Adams, D., Mayer, R., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., & McLaren, B. (2011). Can erroneous examples help middle-school students learn decimals? In C. Kloos, D. Gillet, R. Crespo García, F. Wild, & M. Wolpers (Eds.), Towards ubiquitous learning: European Conference of Technology Enhanced Learning. (pp. 181-195). Berlin: Springer.

Jung, J., & Schütte, M. (2016). Methodologie und methodisches Vorgehen Interpretativer Unterrichtsforschung am Beispiel inklusiven Lernens von Mathematik. *Zeitschrift für Inklusion, (4)* https://www.inklusion-online.net/index.php/inklusion-online/article/view/320.

Kamii, C. (1986). Place Value: An explanation of its difficulty and educational implications for the primary grades. *Journal of research in childhood education, 1*(2), 75-86.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Wiesbaden: Springer.

Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Forschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35*(6), 247-256.

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2014). "Ist das dann noch ein Zehner oder ist das dann ein Einer?" Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten. In J. Roth, & J. Ames (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (pp. 699-702). Münster: WTM-Verlag.

Lorenz, J. (2013). Grundlagen der Förderung und Therapie. Wege und Irrwege. In M. v. Aster, & J. Lorenz (Eds.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (S. 181-193). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

MacDonald, A. (2008). »But what about the oneth?« A Year 7 student's misconception about decimal place value. *Australian Mathematics Teacher*, 64(4), 12-15.

Miller, M. (2006). *Dissens. Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens*. Bielefeld: transcript.

Moeller, K., Pixner, S., Zuber, J., Kaufmann, L., & Nuerk, H.-C. (2011). Early place-value understanding as a precursor for later arithmetic performance - A longitudinal study on numerical development. *Research in Developmental Disabilities, 32*(5), 1837-1851.

Mosandl, C., & Sprenger, L. (2017). Ausbau des Zahlverständnisses bei großen Zahlen und Stellenwerten. In U. Häsel-Weide, & M. Nührenbörger (Eds.), *Gemeinsam Mathematik lernen - Mit allen Kindern rechnen (S. 143-152)*. Frankfurt a. M.: Grundschulverband e. V.

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/ Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.

Müller, G., & Wittmann, E. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele*. Braunschweig: Vieweg.

Nührenbörger, M. (2009). Interaktive Konstruktionen mathematischen Wissens - Epistemologische Analysen zum Diskurs von Kindern im jahrgangsgemischten Anfangsunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(2), 147-172.

Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2015). Processes of mathematical reasoning of equations in primary mathematics lessons. In K. Krainer, & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 9, Prague, Czech Republic* (pp. 316-323). Charles University in Prague: Prague.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2019). Argumentierendes Rechnen: Algebraische Lernchancen im Arithmetikunterricht der Grundschule. In B. Brandt & K. Tiedemann (Eds.), Interpretative Unterrichtsforschung (S. 15-35). Münster: Waxmann.

Ostad, S. (1997). Developmental differences in addition strategies: a comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology, 67*(3), 345-537.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Prediger, S., Freesemann, O., Moser Opitz, E., & Hußmann, S. (2013). Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristiger Reparatur - Förderung bei mathematischen Lernschwierigkeiten in Klasse 5. *Praxis der Mathematik in der Schule, 55*(51), 12-17.

Prediger, S., Leuders, T., & Rösken-Winter, B. (2017). Drei-Tetraeder-Modell der gegenstandsbezogenen Professionalisierungsforschung: Fachspezifische Verknüpfung von Design und Forschung. *Jahrbuch für Allgemeine Didaktik*, 2017, 159-177.

Resnick, L. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. In H.-P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.

Ross, S. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher, 36*(6), 47-51.

Scherer, P. (2009). Diagnose ausgewählter Aspekte des Dezimalsystems bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern. In M. Neubrand (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 835-838). Münster: WTM-Verlag.

Scherer, P. (2014). Low Achievers' Understanding of Place Value – Materials, Representations and Consequences for Instruction. In T. Wassong et al. (Eds.), Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics, (pp. 43-56). Wiesbaden: Springer.

Scherer, P., & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schmassmann, M. (2009). "Geht das hier ewig weiter?" Dezimalbrüche, Größen, Runden und der Stellenwert. In A. Fritz & S. Schmidt (Eds.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 167-185). Weinheim, Basel: Beltz.

Schöttler, C. (2019). *Deutung dezimaler Beziehungen – Epistemologische und partizipatorische Analysen von dyadischen Interaktionen im inklusiven Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften. Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim: Franzbecker.

Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Mathematik-Didaktik, 24*(3/4), 211-235.

Sprenger, L. (2018). *Zum Begriff des Dezimalbruchs. Eine empirische Studie zum Dezimalbruchverständnis aus inferentialistischer Perspektive*. Wiesbaden: Springer.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21 (1)*, 28-49.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective*. Berlin: Springer.

Steinle, V., & Stacey, K. (2004). A longitudinal study of students' understanding of decimal notation: an overview and refined results. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 541-548). Melbourne: Melbourne University.

Treffers, A. (2001). Numbers and numbers relationships. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 101-120). Utrecht: Freudenthal Institute.

van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. Boston: Pearson Education.

Voigt, J. (2000). Abduktion. In M. Neubrand (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000* (S. 694-697). Hildesheim: Franzbecker.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *ZDM*, 3, 106-116.

Wittmann, E. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht. In G. Müller, & E. Wittmann (Eds.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10-41). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing? In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics*

*Classroom* (pp. 167–178). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

## Notation

Häsel-Weide, U. & Schöttler, C. (2021). Das Dezimalsystem verstehen - Bedeutung, Erkenntnisse, Anregungen. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis, 2*. https://doi.org/10.48648/8qae-mb28