ISSN 2701-9012 ZMFP, Vol.4 (2023)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Monika Schoy-Lutz & Esther Brunner

# Die Rolle der Mündlichkeit beim mathematischen Argumentieren von Grundschulkindern

Prof. Dr. Monika Schoy-Lutz, Pädagogische Hochschule Thurgau. e-mail: monika.schoy-lutz@phtg.ch

Prof. Dr. Esther Brunner, Pädagogische Hochschule Thurgau. e-mail: esther.brunner@phtg.ch

## Zusammenfassung

*Mathematisches Argumentieren ist eine zentrale Kompetenz, die auch bereits Kinder im Primarschulalter erwerben sollten. Der Beitrag befasst sich mit der Frage, wie Lernende der dritten Jahrgangsstufe mündlich mathematisch argumentieren. Dazu wurde eine Begründungsaufgabe von zehn Lernenden des dritten Schuljahres in Einzelinterviews bearbeitet. Die mündlichen Begründungen wurden mit einem Kodierleitfaden analysiert. Die Ergebnisse legen zum einen nahe, dass auch Grundschulkinder mathematisch korrekt und reichhaltig argumentieren können, wenn sie die Argumentationen mündlich präsentieren können. Zum anderen zeigen sie, dass in mündlichen Situationen eine Vielzahl von weiteren Mitteln genutzt werden, um mathematisch zu argumentieren. Aufgrund dieser Ergebnisse schlagen wir für den Mathematikunterricht vor, dass v.a. jüngere und sprachlich schwache Lernende die Möglichkeit erhalten sollten, ihre Argumentationskompetenz mündlich zur Performanz bringen zu dürfen.*

## Schlagworte

*Mündliches mathematisches Argumentieren, nonverbale Kommunikation*

# 1. Einführung

Mathematisches Argumentieren gehört zu den zentralen zu erwerbenden mathematischen Kompetenzen für alle Lernenden sämtlicher Bildungsstufen (KMK, 2005), weil mathematisches Argumentieren als eine genuin mathematische Tätigkeit gilt und Beweise das Fach selbst konstituieren (Heintz, 2000). Zudem wird davon ausgegangen, dass mathematisches Argumentieren vertieftes Lernen, einen nachhaltigen Wissenserwerb und Verstehen begünstigt (Hersh, 1993). Für Lehrpersonen stellt sich dabei die Frage, zu welchen Leistungen beispielsweise jüngere Lernende fähig sind und wie sich das Aufgabenformat auf die Leistung der Kinder auswirkt. Gerade jüngeren Kindern fällt das Formulieren einer schriftlichen Begründung schwer (Kosko & Zimmerman, 2019), sodass ihre Leistungen von Lehrpersonen bei der Leistungsbeurteilung häufig unterschätzt werden dürften, weil es den Kindern in schriftlichen Aufgabenformaten nicht gelingt, ihre eigentliche Argumentations-Kompetenz zeigen zu können. Daher ist mündliches Argumentieren, bei dem auch Gesten einbezogen werden können, besonders für den Unterricht mit jüngeren Kindern bedeutsam.

Im vorliegenden Beitrag wird analysiert, wie zehn Grundschulkinder mündlich mathematisch argumentieren und welche Unterstützungsstrukturen sich dabei als besonders hilfreich erweisen. Die eingesetzte Aufgabenstellung ist dem Inhaltsbereich „Form und Raum“ im Deutschschweizer Lehrplan (Amt für Volksschule des Kantons Thurgau, 2016) zugeordnet und kann von jeder Lehrperson so im Unterricht eingesetzt werden.

# 2. Mathematisches Argumentieren

## 2.1 Ziele des mathematischen Argumentierens

Mathematisches Argumentieren zielt in der Grundschule darauf ab, a) mathematische *Aussagen* grundsätzlich zu *hinterfragen* und hinsichtlich ihrer Korrektheit *prüfen* zu können, b) mathematische *Zusammenhänge erkennen* und *Vermutungen entwickeln* zu können und c) *Begründungen suchen* und *nachvollziehen* zu lernen (Walther, Selter & Neubrand, 2008, S. 32). Nicht weiter spezifiziert wird, ob diese anspruchsvollen Tätigkeiten in mündlicher, nonverbaler oder in schriftlicher Form erfolgen sollen.

### 2.2 Regeln des Argumentierens und verschiedene Komponenten von Argumentationen

Argumente werden in der didaktischen Forschung oft entlang ihrer logischen Struktur untersucht. Dabei orientiert man sich an den zentralen Teilen einer Argumentation, wie sie Toulmin (1996) beschrieben hat. Minimal besteht ein Argument aus einer unbezweifelten Aussage und einer daraus abgeleiteten logischen Schlussfolgerung, die mit einer Regel abgestützt wird (z. B. „Vier ist doppelt so viel wie zwei, d. h. $4 = 2 \cdot 2$, weil aus vier zwei Zweierpakete gemacht werden können“). Mathematisches Argumentieren folgt entsprechenden Regeln: Es darf beim Argumentieren beispielsweise nur auf gesicherte Aussagen zurückgegriffen werden und die Argumentation selbst muss auf akzeptierten Schlussregeln beruhen (Jahnke & Ufer, 2015). Die Argumente, die verwendet werden, müssen mathematische sein, die aus der Mathematik selbst und nicht etwa aus dem Alltag stammen (Fischer & Malle, 2004).

Der enge Fokus auf die logische Struktur eines Arguments und die Vollständigkeit einer Argumentation greift aber für die Beschreibung und Erforschung von mathematischem Argumentieren junger Kinder zu kurz. Hierfür schlägt Stylianides (2016) vor, drei verschiedene Komponenten von Argumentationen zu beleuchten, die vereinfacht als (1) Wissensbasis oder als inhaltliche Lösungsidee (Brunner et al., 2022, S. 16), auf die beim Argumentieren zurückgegriffen wird, als (2) die Art der Begründung sowie als (3) die Art der Repräsentation der Argumentation zusammengefasst werden können.

### 2.3 Denkprozess beim mathematischen Argumentieren

Mathematisches Argumentieren ist voraussetzungsreich und beinhaltet verschiedene grundlegende Denkprozesse, die im Einzelnen beschrieben werden können (z. B. Brunner, Lampart & Jullier, 2022). So rücken 1) das *Erkennen und Identifizieren* einer mathematischen Struktur mit ihren Besonderheiten in den Fokus, 2) das *Darstellen und Repräsentieren* eben dieser Struktur mit geeigneten Mitteln, 3) das *Begründen* des Zustandkommens des mathematischen Sachverhaltes und schliesslich 4) das Verständnis für das *Verallgemeinern* eines erkannten Zusammenhangs und damit das Treffen von Vorhersagen für weitere Fälle in den Fokus (Brunner, 2019a; Lindmeier, Brunner & Grüßing, 2018). Diese vier grundlegenden Prozesse werden begleitet von Phasen des Experimentierens und Ausprobierens sowie des Überprüfens und Validierens

(Jeannotte & Kieran, 2017). Sie können sich auf unterschiedlichen Darstellungsebenen enkativ, ikonisch oder symbolisch manifestieren.

## 2.4 Mündliches, nonverbales oder schriftliches Argumentieren?

Im Unterricht der ersten Grundschuljahre spielen schriftliche Aufgabenformate zum Argumentieren eine eher untergeordnete Rolle, weil die selbstständige Produktion von schriftlichen Begründungen jungen Kindern noch schwer fällt (Kosko & Zimmerman, 2019). Umso bedeutsamer ist daher der Einbezug von mündlichen Anlässen zum Argumentieren. Hierbei können die Argumentationen ergänzt werden durch nonverbale Reaktionen wie Gesten (z. B. zeigen eines Zusammenhangs, verändern eines Musters, usw.). Gerade nonverbalen Reaktionen wird eine wichtige Rolle zugeschrieben, weil sie mündliches Argumentieren, das eine schnelle Verhaltensentscheidung erfordert, unterstützen können (z. B. Forgas & Jones, 1985).

## 2.5 Die Rolle des Gesprächs beim Argumentieren und entsprechende Unterstützungsstrukturen

Mathematisches Argumentieren als Tätigkeit ist in einen sozialen Kontext eingebettet und benötigt eine diskursive Situation (Brunner, 2014), die in Form eines Gespräches gestaltet sein kann. Dem Lehrgespräch selbst sind verschiedene Unterstützungsstrukturen eigen. So wird im mündlichen Setting von Argumentationsprozessen davon ausgegangen, dass durch das Gespräch ein Scaffolding erfolgt (Nippold & Ward-Lonergan, 2010; O'Halloran, 2014). Im Gespräch können z. B. konkrete Hilfen beim Aufgabenverständnis gegeben werden. Es können aber auch Ko-Konstruktionen, d. h. gemeinsam erarbeitete Lösungen durch gezieltes Nachfragen oder durch initiierte eigenständige Reflexionen der Lernenden angeregt und unterstützt werden (Collins et al., 1989). Zudem können durch das Gespräch auch Begründungsprozesse am Laufen gehalten werden. Davon ausgehend lässt sich vermuten, dass Kinder zu einem besseren Begründungsergebnis kommen, wenn sie mündlich argumentieren können, weil die Ko-Konstruktion beispielsweise die Klärung der Aufgabenstellung ermöglicht.

Nachfragen der Interviewperson können Einblicke in Denkkonzepte von Lernenden liefern. Dabei geht es nicht darum, dem Kind Strategien zu vermitteln, sondern darum, den Begründungsprozess in Gang zu halten und damit die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Antwort zu erhöhen. Zahlreiche qualitative Fallstudien (z. B. Krummheuer & Fetzer, 2005;

Schwarzkopf, 2000) zeugen von der Ko-Konstruktion von Begründungen im Gespräch.

Auch die Fähigkeit, den eigenen Problemlöseprozess reflektieren zu können, stellt eine wichtige mathematische Kompetenz dar (Peschek et al., 2008). Reflexion schafft die Verbindung von bereits vorhandenem Wissen und derzeitigen Erfahrungen zu Handlungsmöglichkeiten und Anwendungssituationen (McAlpin & Weston, 2002, S. 69). Ein Reflexionsprozess manifestiert sich beispielsweise darin, dass Lernende ihre Antworten eigenständig korrigieren oder in eine andere Richtung lenken und dies auch verbal oder nonverbal zum Ausdruck bringen. Reflexionen im Sinne eines Überprüfens können dazu führen, dass zunächst fehlerhafte Bearbeitungen selbstständig korrigiert werden. Manchmal genügt bereits die Anwesenheit einer Person, um bei Lernenden einen Reflexionsprozess in Gang zu setzen. Daraus lässt sich vermuten: Wenn Kinder mündlich argumentieren, sind Reflexionsprozesse erkennbar, die zu einer korrekten Lösung führen können, nicht aber zwangsläufig dazu führen müssen. Die Analyse solcher Reflexionsprozesse in Quantität und Qualität lässt Rückschlüsse auf diese Vermutung zu.

### 2.6 Repräsentation des Denkens im Gespräch

Im Gespräch müssen Denkprozesse für andere „sichtbar“ gemacht werden, damit sie nachvollzogen werden können. In der Tradition Piagets (zusammenfassend Piaget, 2003) geht es bei der Repräsentation des Denkens um die semiotische Funktion von Symbolen und Zeichen, die als Denkobjekte fungieren und Vorstellungen, jenseits der unmittelbaren Wahrnehmung eines Objekts, ermöglichen. Die Repräsentation des Denkens kann dabei auf unterschiedliche Weisen erfolgen (Aebli, 2011): Im Wesentlichen lassen sich Repräsentationen durch eine Handlung mit oder ohne konkretem Material bzw. eine Geste, durch ein Bild oder durch ein Symbol unterscheiden (vgl. Bruner, 1971), wobei sich symbolische Repräsentationen weiter in sprachlich-symbolische (z. B. Text) und formal-symbolische (z. B. Term oder Gleichung) unterteilen lassen (Zech, 2002). Diese grobe Unterscheidung liegt auch der Ausdifferenzierung der Art der Repräsentation einer Argumentation bei Stylianides (2016) zugrunde (siehe 2.2).

Im Gespräch werden oft Veranschaulichungsmittel eingesetzt (z. B. Welsing, 2018), die beim mündlichen Argumentieren als unterstützende oder zusätzliche Repräsentationsmöglichkeit zur Verfügung stehen und handlungsnahes Argumentieren oder mathematisches Darstellen am Gegenstand ermöglichen. Beim schriftlichen Argumentieren sind die Repräsentationsformen eingeschränkt, auch wenn es nicht zwingend nur ums Schreiben geht, sondern darum, dass die Kinder „etwas zu Papier" bringen (Fetzer, 2007, S. 159), das durchaus auch auf ikonischer Ebene oder mit Hilfe mathematischer Darstellungsmöglichkeiten zum Ausdruck kommen kann. Dennoch ist die Repräsentation durch konkrete Handlungen oder Gesten erschwert oder durch den Alleinanspruch der Verschriftlichung gar ganz ausgeschlossen.

Die Bedeutung von Gesten, die die mündlichen Aussagen begleiten, wird nicht zuletzt in der aktuellen Diskussion rund um die kognitiven Funktionen von Gesten beim mathematischen Arbeiten deutlich (Salle & Krause, 2021) und stellt auch ein relativ neues Forschungsgebiet im Zusammenhang mit embodied cognition (Alibali & Nathan, 2012; Shapiro, 2011; Wilson & Golonka, 2013) dar.

Mündliche Situationen sind dazu prädestiniert, nicht nur die verbale Sprache, sondern auch die Gestik zur Darstellung von mathematischen Inhalten und Gedankengängen zu verwenden. Im Gegensatz zu reinen Gedankengängen sind Gesten für andere konkret erkennbar und können dadurch Teil der gemeinsamen Ko-Konstruktion von Lösungsprozessen werden. Die Bedeutung von Gesten ist nicht eindeutig definiert und unterliegt einem sozialen Prozess des Aushandelns von Bedeutungen. In Gesprächen und Interviews ist es selbstverständlich, dass Gesten und nonverbale Kommunikationsmittel eingesetzt werden (z. B. Nicken, Kopf schütteln, sich groß machen, sich klein machen, Mimik einsetzen, Arme verschränken etc.). Lernende, die mündlich argumentieren, zeigen gegenüber schriftlich erhobenen Argumentationsprozessen zusätzlich gestische Repräsentation, die ganz gezielt einen mathematischen Sachverhalt beschreiben. Einige dieser Gesten können unumstritten als mathematische Darstellungsmittel gesehen werden, die den mathematischen Aussagegehalt unterstützen oder sogar als eigenständige, von der Verbalisierung unabhängige, mathematische Darstellung betrachtet werden können.

# 3. Fragestellungen und Zielsetzung der Studie

## 3.1 Fragestellungen

Die obigen Ausführungen heben hervor, dass es zu kurz greift, mündliche Argumentationen von jungen Kindern lediglich bezüglich ihrer Vollständigkeit und ihrer logischen Struktur zu untersuchen. Wichtig ist, dass auch andere Aspekte des Denk- und Arbeitsprozesses in den Vordergrund rücken. Der vorliegende Beitrag befasst sich deshalb mit folgenden Fragestellungen:

1) Wie lassen sich die mündlichen Begründungsleistungen von Lernenden des dritten Schuljahrs entlang verschiedener Aspekte beschreiben?

2) Wie wirken sich die im Gespräch inhärenten Unterstützungsstrukturen auf die mündliche Begründungsleistung aus?

Diese Fragestellungen sind didaktisch bedeutsam, weil ihre Beantwortung Erkenntnisse für die Unterrichtsgestaltung zum mathematischen Argumentieren in der Primarschule ermöglichen könnte.

## 3.2 Konsequenzen für die Beschreibung von Begründungsleistungen

Weil zu erwarten ist, dass gerade bei jüngeren Lernenden Argumentationen nicht vollständig sein werden und der Prozess selbst auch nicht zwingend vollständig bis zu einer Generalisierung durchlaufen wird, ergibt es Sinn, die vier Schritte des Denkprozesses (vgl. 2.3) auch einzeln zu erfassen und sie jeweils hinsichtlich der Komponenten einer Argumentation (vgl. 2.2) zu analysieren.

Mündliche Argumentationen sollten darüber hinaus vertiefend qualitativ entlang der für Mündlichkeit spezifischen Aspekte analysiert werden (vgl. Abschnitt 2.5, 2.6) und zwar bezüglich Hilfen beim Aufgabenverständnis, Ko-Konstruktion durch gezieltes Nachfragen, Ko-Konstruktion durch eigenständige Reflexionen der Lernenden sowie mathematischen Darstellens durch Gesten.

# 4. Methoden

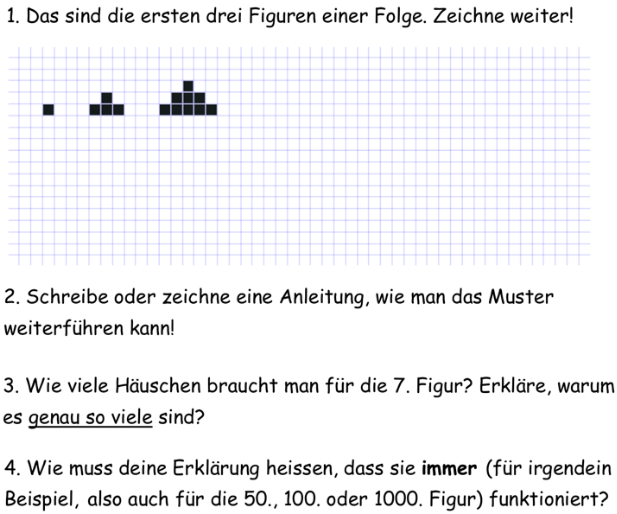
## 4.1 Datensatz und Stichprobe

Für die vorliegende explorative Studie wurden gefilmte Einzelinterviews mit zehn ($N_{münd.} = 10$) Kindern Anfang des dritten Schuljahres (7 Jungen und 3 Mädchen, davon zwei nicht mit Deutsch als Erstsprache) analysiert, die alle dieselbe Aufgabenstellung mündlich bearbeiteten (vgl. 3.2).

Zu allen Interviews wurden Transkripte erstellt, in denen das verbale und nonverbale Verhalten dokumentiert wird. Zusätzlich wurde erhoben, wie lange die Kinder an der jeweiligen Teilaufgabe arbeiteten.

## 4.2 Aufgabenstellung und Ablauf

Die Aufgabenstellung (vgl. Abb.1) aus den Interviews stammt aus der quantitativen Studie „MaBeLL-INT“ (Brunner, 2018) und folgt den beschriebenen vier Denkschritten (vgl. Abschnitt 2.1): Teilaufgabe 1 zielt auf das Erkennen ab, das notwendig ist, um das Muster fortsetzen zu können. Das Muster selbst ist ikonisch repräsentiert und kann auch auf ikonischer Ebene fortgesetzt werden. Teilaufgabe 2 verlangt die Beschreibung der zentralen Merkmale des Musters. Teilaufgabe 3 erfordert eine Begründungsleistung für das Zustandekommen eines bestimmten Zusammenhangs und Teilaufgabe 4 zielt auf eine Verallgemeinerung ab. Grundsätzlich sind unterschiedliche Begründungsideen möglich: Es kann im Wesentlichen über die Quadratzahlen begründet werden oder über die Idee, dass unten an die Figur jeweils eine um 2 Kästchen längere Reihe angefügt werden muss oder indem auf jeder Seite in jeder Reihe je 1 Kästchen dazukommt und eine Spitze aufgesetzt wird (Details siehe Brunner et al., 2022).



1. Das sind die ersten drei Figuren einer Folge. Zeichne weiter!

2. Schreibe oder zeichne eine Anleitung, wie man das Muster weiterführen kann!

3. Wie viele Häuschen braucht man für die 7. Figur? Erkläre, warum es genau so viele sind?

4. Wie muss deine Erklärung heissen, dass sie **immer** (für irgendein Beispiel, also auch für die 50., 100. oder 1000. Figur) funktioniert?

Abb. 1: Aufgabenstellung entlang der vier Denkschritte (vier Teilaufgaben)

Die Interviewperson begrüßte das Kind und las danach jede einzelne Teilaufgabe langsam vor, es sei denn, das Kind begann den Aufgabentext selbständig zu lesen. Zur Bearbeitung der Aufgaben konnte das Kind die Repräsentationsebene frei wählen. Für die enaktive Bearbeitung lagen Holzwürfel und ein Karomuster bereit, auf das die Holzwürfel gelegt werden konnten. Entsprechend der ikonischen Repräsentationsebene waren die ersten drei Figuren der Folge bereits mit Holzwürfeln auf das vorgegebene Karomuster gelegt. So konnte das befragte Kind selbst entscheiden, ob es die weiteren Figuren der Folge auf dem Aufgabenblatt zeichnen oder lieber enaktiv bauen wollte. Danach erhielt das interviewte Kind möglichst keine oder wenig inhaltliche bzw. strategische Lernunterstützung für die Bearbeitung der Aufgaben durch die Interviewperson. Es wurde lediglich immer wieder aufgefordert, seine Gedanken zu erläutern. Nachfragen der Interviewperson bezogen sich insbesondere auf Begrifflichkeiten oder Aussagen, die das Kind verwendet hatte. Wenn das Kind beispielsweise äußerte „ich sehe einen Rhythmus", fragte die Interviewperson nach, was das Kind mit „Rhythmus" meinte. Bei Teilaufgabe vier fragte die Interviewperson nach, ob die Bauanleitung *immer* funktioniert, um erkennen zu können, ob eine Verallgemeinerung erkannt, aber noch nicht explizit benannt werden konnte.

## 4.3 Kodiersystem und Kodierung

Zur Beschreibung des mathematischen Argumentierens der Grundschulkinder wurde auf ein Kodiersystem zurückgegriffen, das bereits in einer grossen quantitativen Studie zu schriftlichen Begründungsleistungen von Primarschulkindern bei derselben Aufgabe (Brunner, 2018) erfolgreich (akzeptable bis gute Interraterübereinstimmung) eingesetzt wurde. Dies ermöglicht in einem weiteren Schritt auch einen Vergleich der mündlichen Begründungsleistungen mit den schriftlichen von gleichaltrigen Kindern. Zudem bietet dieses Kodiersystem auch eine Orientierung für Lehrpersonen, wie sie selbst Begründungsleistungen von Kindern differenziert beschreiben können. Das Kodiersystem erfasst u.a. die vier verschiedenen Schritte und ihre Umsetzung entlang zentraler Aspekte wie Korrektheit und Vollständigkeit, sowie der Repräsentation des Denkens und der eingesetzten Lösungsideen (Details in Brunner, 2020).

Korrektheit und Vollständigkeit der Antwort wurden für die vier Teilaufgaben bzw. Schritte einzeln eingeschätzt und zwar jeweils auf drei bzw. vier Stufen: 1) „Nicht korrekt“, d. h. die gegebene Antwort ist falsch. 2) „Teilweise korrekt“, d. h. die gegebene Antwort enthält korrekte und falsche Aussagen. 3) „Korrekt, aber unvollständig“, d. h. die gegebene Antwort ist korrekt ohne falsche Teile, aber sie ist nicht vollständig, indem beispielsweise ein zentraler (Begründungs-/Antwort-)Aspekt fehlt. 4) „Korrekt und vollständig“, d. h. die gegebene Antwort enthält ausschließlich korrekte Aussagen und es sind sämtliche inhaltlich notwendige (Begründungs-/Antwort-)Aspekte gegeben. Bei Schritt 1 entfällt die Ausprägung 3, weil die Zeichnung der Figuren – sofern sie korrekt ist – automatisch auch vollständig ist.

Die Repräsentation des Denkens wurde bei jeder Teilaufgabe nominal eingeschätzt entlang der Kategorien 1) enaktiv, 2) ikonisch, 3) tabellarisch, 4) sprachlich-symbolisch, 5) formal-symbolisch und 6) Mischformen. Mischformen wurden dann nur kodiert, wenn zwei oder mehrere Repräsentationsformen gleichwertig neben- oder miteinander benutzt wurden. Andernfalls wurde der Hauptcharakter der Repräsentation eingeschätzt.

## 4.4 Erfassung von Unterstützungsstrukturen des Gesprächs

Für die Erhebung mündlicher Begründungsleistungen wurden gemäß qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) weitere Aspekte, die spezifisch auf die mündliche Situation abzielen, induktiv ergänzt und deduktiv nach Kategorien kodiert. Dadurch wird die typisierende Strukturierung (Definition der Kategorie, Sammlung von Ankerbeispielen und Bestimmung der Kodierregeln) methodisch umgesetzt. Es sind dies die Kategorien 1) Hilfen beim Aufgabenverständnis (AV), 2) Ko-Konstruktion durch das Nachfragen der Interviewperson (NF), 3) Ko-Konstruktion durch eigenständige Reflexionsprozesse der Kinder (RP) und 4) mathematisches Darstellen via Gesten (MD).

Die Kodierung in den Transkripten erfolgten in allen vier Aspekten nach jeder Teilaufgabe. Dabei kann es unterschiedliche Ausprägungen (0, 1) oder (0, 1, 2) geben, die wie folgt zu benennen sind:

Der **Aspekt des Aufgabenverständnisses (AV)** wird in jedem Aufgaben-Teilprozess bezüglich seines Vorkommens – Nichtvorkommens eingeschätzt. Er wird dann mit 1 kodiert, wenn eine gezielte Nachfrage zum Aufgabenverständnis des Kindes erkennbar ist.

Die Operationalisierung von **Ko-Konstruktionen durch Nachfragen der Interviewperson (NF)** wird mit den Werten 0, 1 oder 2 kodiert. Äußerungen der Interviewperson werden dann mit 1 oder 2 kodiert, wenn diese durch eine Frage oder Ergänzung ganz konkret auf inhaltliche Äußerungen des Kindes Bezug nimmt. Führt diese Nachfrage beim Kind dann direkt in die Richtung einer korrekten Antworterwartung, wird dies mit dem Wert 2 kodiert, ansonsten mit dem Wert 1. Wenn sich mehrere inhaltliche Nachfragen innerhalb einer Teilaufgabe erkennen lassen, wird der Wert der höchsten Ausprägung kodiert.

Ankerbeispiele für das Erkennen von Ko-Konstruktionen sind: „Was meinst du mit ‚Rhythmus?'", „Gilt das immer?" oder „Kannst du noch etwas dazu sagen?", „Habe ich dich richtig verstanden…?" Nach einer solchen Rückfrage der Interviewperson hat das Kind nochmals die Möglichkeit seine Argumentationskompetenz im zweiten Anlauf zum Ausdruck zu bringen. Lässt die Antwort beispielsweise erkennen, dass „regelmässig immer etwas dazu kommt", bzw. „dass es immer mehr werden", wird dies mit dem Wert 1 kodiert. Wenn aber deutlich wird, „wie viele Würfel dazukommen (z.B. durch Ummantelung) erhält das Kind den Wert 2.

Äußerungen der Interviewperson, die sich nicht als Nachfrage identifizieren lassen, werden nicht kodiert. Dazu gehören beispielsweise Ausdrücke wie „Gut", „Aha", „o. k."

Auch die Kategorie der **eigenständigen Reflexionsprozesse (RP)** wird in der Studie mit den Werten 0, 1 oder 2 kodiert. Erkennbar wird ein eigenständiger Reflexionsprozess dann, wenn die befragte Person, ohne unmittelbar zuvor erkennbare Nachfrage der Interviewperson ihr Vorgehen, ihr Ergebnis oder ihre Antwort verbal erkennbar korrigiert und/ oder ergänzt.

Führt dieser Reflexionsprozess nicht zu einem positiven Verlauf der Begründungskompetenz, im Sinne des Erwartungshorizonts der Aufgabe, wird dies mit 1 kodiert, bei einem positiven Verlauf mit 2.

Die Kategorie **mathematisches Darstellen via Gesten (MD)** wird dual mit den Werten 0 und 1 kodiert, je nachdem ob in der jeweiligen Teilaufgabe mathematische Gesten zu identifizieren sind oder nicht. Die quantitative Ausprägung wird hier nicht erfasst.

Als mathematische Geste gilt eine spontane oder bewusst eingesetzte Bewegung des Körpers, besonders der Hände und des Kopfes, die die eigenen Worte oder die eigene Handlung mit Bezug zur Aufgabe begleitet oder sogar ersetzt. Gesten, die zu viel Interpretationsspielraum erlauben, werden nicht kodiert.

| Mathematische Geste | Nicht mathematische Geste |
|---|---|
| Geste mit direkt erkennbarem mathematischem Bezug | Geste mit nicht direkt erkennbarem mathematischem Bezug |
| Zählvorgang mit den Fingern gestisch andeuten, indem auf einzelne Objekte gedeutet wird | Auf dem Bleistift kauen |
| Geometrische Form der Figuren mit Händen beschreiben (Breite der Figur, Höhe der Figur, spitz zulaufende mit Händen in die Luft andeuten) etc. | An den Haaren spielen |

Tab. 1: Beispiele für Gesten im Interview

### 4.5 Datenauswertung

Die Daten wurden in SPSS erfasst und mit Verfahren deskriptiver Statistik (Häufigkeitsanalysen) ausgewertet. Da sich aufgrund der kleinen Fallzahlen in den beiden Teilstichproben keine elaborierteren Verfahren einsetzen lassen, werden die Daten in der absoluten Anzahl und relativ zur Teilstichprobe dargestellt.

Für die detaillierte Analyse der Interviews wurden die Videoaufnahmen vollständig transkribiert und zusätzlich auch inhaltsanalytisch (Mayring, 2010) entlang der vier spezifisch auf die Mündlichkeit ausgerichteten Codes aus dem ergänzten Kodiersystem ausgewertet (Abschnitt 3.2).

# 5. Ergebnisse

Die Ergebnisdarstellung erfolgt zunächst deskriptiv (Abschnitt 4.1) entlang der aufgetretenen Häufigkeiten (absolut und relativ) und im Anschluss qualitativ im Hinblick auf vertiefte Einblicke in mündliches Begründen.

## 5.1 Deskription der mündlichen Begründungsleistungen

Alle Kinder, die mündlich im Interview begründen konnten, hielten den Bearbeitungsprozess bis zum Schluss aufrecht, d. h. sie führten sämtliche Argumentations-Schritte aus.

| **Korrektheit** | **Schritt 1 Erkenn.** | **Schritt 2 Beschr.** | **Schritt 3 Begr.** | **Schritt 4 Verallg.** |
|---|---|---|---|---|
| Keine Antwort | 0<br>0 % | 0<br>0 % | 0<br>0 % | 0<br>0 % |
| Nicht korrekt | 1<br>10 % | 1<br>10 % | 3<br>30 % | 2<br>20 % |
| Teilw. korrekt | 1<br>10 % | 2<br>20 % | 0<br>0 % | 4<br>40 % |
| Korrekt, unvollst. | -* | 2<br>20 % | 1<br>10 % | 4<br>40 % |
| Korrekt, vollst. | 8<br>80 % | 5<br>50 % | 6<br>60 % | 0<br>0 % |

Tab. 2: Anzahl und Anteil korrekter Antworten nach Teilaufgabe bzw. Prozessschritt ($N = 10$). * bei Schritt 1 nur 3 Stufen möglich (nicht korrekt; teilweise korrekt; korrekt)

Bezüglich gewählter Repräsentationsform repräsentierten die Kinder ihr Denken überwiegend enaktiv oder ikonisch. Tabellarisch oder formal wurde nicht repräsentiert. Ein Kind hat die Aufgabe bearbeitet, aber völlig falsch verstanden, was daher auch nicht als Repräsentation der Antwort kordiert wurde.

| Repräsentationsform | Schritt 2 Beschr. | Schritt 3 Begr. | Schritt 4 Verallg. |
|---|---|---|---|
| Keine Repr. | 1<br>10 % | 1<br>10 % | 1<br>10 % |
| Enaktiv | 5<br>50 % | 2<br>20 % | 3<br>30 % |
| Ikonisch | 3<br>30 % | 2<br>20 % | 1<br>10 % |
| Tabellarisch | 0<br>0 % | 0<br>0 % | 0<br>0 % |
| Sprachlich-symbolisch | 1<br>10 % | 0<br>0 % | 5<br>50 % |
| Formal-symbolisch | 0<br>0 % | 0<br>0 % | 0<br>0 % |
| Andere, Mischform (d. h. gleichwertig nebeneinander stehende Formen) | 0<br>0 % | 5<br>50 % | 0<br>0 % |

Tab. 3: Anzahl und Anteil Repräsentationsform nach Prozessschritt ($N = 10$)

## 5.2 Vertiefter Einblick in mündliches Begründen

In den folgenden Abschnitten werden Einblicke in Prozesse beim mündlichen Argumentieren entlang der vier Aspekte (siehe Abschnitt 3.4) gewährt.

### *a) Hilfen beim Aufgabenverständnis*

Die Hilfe beim Aufgabenverständnis wurde in den Interviews dann erfasst, wenn die Schülerinnen oder Schüler von sich aus eine Rückfrage zu einer Teilaufgabe gestellt haben. Dies war bei den zehn befragten Kindern in jeweils 4 Begründungsschritten wie folgt der Fall:

| | Schritt 1 | Schritt 2 | Schritt 3 | Schritt 4 |
|---|---|---|---|---|
| Hilfen | 30 % | 0 % | 20 % | 40 % |

Tab. 4: Anteil an Hilfen bei der Aufgabenstellung bei 40 Teilaufgaben (Schritten) in %

Insbesondere bei Begründungsschritt 4 (Verallgemeinerung) nehmen die Kinder in 40 % der Fälle die Möglichkeit wahr, das Aufgabenverständnis mit der Interviewperson zu klären.

**Beispiel 1: Fehlverständnis bei Aufgabenstellung in Begründungsschritt 3**

| | | |
|---|---|---|
| 7 | I | Wie viele Würfelchen hätte das 7. Bauwerk? (…) |
| 8 | $S_2$ | Hä, jetzt verstehe ich es nicht mehr. Also sieben solche Figuren? Vom größten zum kleinsten? |
| 9 | I | Nur eine, also die Siebte. [1] |

$S_2$ weiß im Beispiel 1 zunächst nicht (8), ob die Summe von sieben Bauwerken bestimmt werden soll, oder nur die Anzahl an Würfeln im siebten Bauwerk. Ein Fehlverständnis der Aufgabenstellung würde in einer schriftlichen Befragung zu einem mit „0“ kodierten Ergebnis führen, was nicht zwangsläufig der Begründungskompetenz von $S_2$ entspräche. Ein fehlendes Aufgabenverständnis wird im Interview deutlich und kann durch ein Nachfragen des Kindes geklärt werden, so dass $S_2$ im Beispiel die Aufgabe weiterbearbeiten kann.

Man erkennt im weiteren Verlauf des Interviews, dass $S_2$ zunächst auch mit der Nummerierung der Bauwerke ein Problem hat, da er das erste „Einer-Bauwerk“ nicht als solches erkennt und mit dem Zählen der Würfelanzahl beim zweiten Bauwerk startet.

### *b) Ko-Konstruktion durch Nachfragen der Interviewperson (NF)*

Nachfragen der Interviewperson können Einblicke in Denkkonzepte liefern. Dabei geht es darum, den Begründungsprozess in Gang zu halten

[1] In den Transkripten wurden die Kinder mit S1 bis S10 bezeichnet. Um einen besseren Einblick in den Zeitpunkt der ausgewählten Transkriptausschnitte geben zu können, werden die Interaktionen im Transkript fortlaufend nummeriert, so dass die aufgeführten Beispiele nicht immer bei Zeile (1) beginnen. Eine neue Interaktionseinheit im Transkript beginnt dann, wenn entweder a) die sprechende Person wechselt, oder b) eine neue Teilaufgabe bzw. inhaltlich klar abtrennbare Handlung beginnt.

und damit die Wahrscheinlichkeit für ein korrektes Ergebnis oder eine korrekte Antwort zu erhöhen. Beispiel 2 verdeutlicht dies.

**Beispiel 2: Ko-Konstruktion durch Nachfragen der Interviewperson mit Erfolg**

| | | |
|---|---|---|
| 12 | L | Z. B. beim 50. Bauwerk. Gibt es da eine Regel, wie ich auf die Anzahl an Würfeln kommen könnte, die immer gilt? |
| 13 | $S_1$ | Dann ist das in dem Fall…, dann ist das 45 höher (hält seine Hand über den höchsten Punkt des 5. Bauwerks und deutet damit die Höhe eines fiktiven Bauwerks an). |
| 14 | L | Aha, also 50. Stockwerke. |
| 15 | $S_1$ | 45 Stockwerke höher. |
| 16 | L | Und die Stockwerke? |
| 17 | $S_1$ | Das sind dann (…) das weiss ich nicht. |
| 18 | I | Das weisst du nicht, o. k. Aber du sagst, beim 50. wären es 50 Stockwerke. Habe ich dich da richtig verstanden? |
| 19 | $S_1$ | (nickt). |
| 20 | I | O.k. aber wie die Stockwerke aufgebaut sind, dazu kannst du nichts sagen? |
| 21 | $S_1$ | (schüttelt den Kopf) (…) Doch (…), wenn man weiss, wie hoch es ist (zeigt auf die verlängerte Höhe der 5. Figur), dann weiss man auch wie lang es da unten sein muss (zeigt auf die unterste Reihe der 5. Figur). Denn es muss ja immer so hoch gehen (deutet mit dem Bleistift die Höhe und Breite einer fiktiven Figur an). |

Zunächst hat sich $S_1$ keine Gedanken darüber gemacht, dass es mehrere Aspekte geben könnte, die bei einer Verallgemeinerung der Baukonstruktion beachtet werden müssen. $S_1$ beschränkt sein Augenmerk auf die Höhe des Bauwerks (15). Das Nachfragen der Interviewperson führt dazu, dass $S_1$ seine Aussage ergänzt und damit einen weiteren wichtigen Aspekt, der sich auf die Anzahl an Würfeln in der untersten Ebene bezieht, benennt (15). Die Qualität seiner Begründung kann als höher eingestuft werden als zu Beginn des Ausschnitts. $S_1$ hat damit von der mündlichen Situation profitiert, ohne, dass I. eine inhaltliche Lernbegleitung gegeben hätte. Ko-Konstruktionsprozesse, die vom Nachfragen der Interviewperson geprägt sind, führen aber nicht zwangsläufig zum Erfolg, wie Beispiel 3 zeigt.

**Beispiel 3: Ko-Konstruktion durch Nachfragen der Interviewperson ohne Erfolg**

| | | |
|---|---|---|
| 6 | I | Wie viele Würfelchen bräuchtest du für die siebte Figur? |
| 7 | $S_3$ | (Nimmt sich ein leeres Blatt, einen Stift und zählt die Anzahl an Würfeln in der vierten und fünften Figur. S1 schreibt 16 und 28 auf ein Blatt Papier). Da brauche ich zwölf mehr (S1 zeigt auf das fünfte Bauwerk). |
| 8 | I | Zwölf mehr? Bei der siebten Figur? |
| 9 | $S_3$ | (nickt). |
| 10 | I | Mhm, schreibst du das Ergebnis bitte noch auf? |
| 11 | $S_3$ | (Schreibt zu Aufgabe 3: „zwölf mehr“ auf). |
| 12 | I | Zwölf mehr von was? |
| 13 | $S_3$ | Von den Würfeln, von diesen (zeigt auf einen Würfel in Figur 5). |
| 14 | I | Mhm, aber von welcher Figur „zwölf mehr“? |
| 15 | $S_3$ | Von so einer Pyramide (zeigt auf die 5. Figur). |
| 16 | I | Von der fünften oder der vierten? |
| 17 | $S_3$ | von der fünften. |
| 18 | I | Von der fünften. Von der fünften zwölf mehr? |
| 19 | S3 | Ja. |

$S_3$ zeigt ein Fehlverständnis bei der Begründungsidee (8). Er geht von einem statischen Bildungsgesetz aus und ermittelt die weiteren Figuren über die Differenz aus 16 und 28, also „immer 12 mehr“. Das Nachfragen der Interviewperson allein (9) bringt $S_3$ in dieser Situation nicht dazu, seine Antwort nochmals zu überprüfen oder zu korrigieren.

### c) *Ko-Konstruktion durch eigenständige Reflexionen der Lernenden (RP)*

Rein quantitativ lässt sich festhalten, dass in 40 Begründungsschritten (10 Kinder je 4 Begründungsschritte) zehn zu einem positiven Effekt im Begründungsprozess führten und fünf davon ohne Erfolg blieben (vgl. Tab. 2). Auf alle Begründungsschritte bezogen, führten demnach 25 % der Fälle durch eigenständige Reflexionsprozesse zu einer positiven Auswirkung auf den Begründungsprozess.

| | Kein RP | RP gesamt | RP erfolgreich | RP nicht erfolgreich |
|---|---|---|---|---|
| Häufig-keit | 10<br>25.0 % | 15<br>37.5 % | 10<br>25.0 % | 5<br>12.5 % |

Tab. 5: Häufigkeit der eigenaktiven Reflexionsprozesse in 40 Teilaufgaben (4 Schritte von 10 Lernenden)

Wie solche Reflexionsprozesse konkret aussehen können, verdeutlichen die nachfolgenden Beispiele.

**Beispiel 4: Erkennbarer Reflexionsprozess in Bezug auf die Bauvorschrift der Folge**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | I | Zeichne oder baue weiter. |
| 2 | S7 | (Beginnt, das vierte Bauwerk zu bauen, indem er sechs Würfel in die unterste Reihe legt). |

Abb. 2: Fehlerhafte Grundlänge des vierten Bauwerks

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $S_7$ | (Legt ein Bauwerk mit 6, 4, 2, 1 Würfeln.) |

Abb. 3: Fehlerhaftes Bauwerk mit Grundlänge 6

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $S_7$ | (Hält inne, betrachtet die Folge, zählt vermutlich und nickt dabei rhythmisch mit dem Kopf, setzt sich und betrachtet die Folge von der Seite, mehrere Sekunden lang, ohne zu sprechen. Seine Augen bringt er auf die Höhe der Figurenfolge) (…). |
| 5 | $S_7$ | (Springt auf, zerstört sein viertes Bauwerk. Legt jetzt 7, 5, 3, 1 Würfel korrekt zu Figur 4 von unten nach oben.) |
| 6 | $S_7$ | (Baut auch das fünfte Bauwerk korrekt). |

$S_7$ baut ohne zu zögern das vierte Bauwerk (2, 3). Erst im Vergleich mit den anderen Figuren erkennt $S_7$, dass das der Folge innewohnende Muster nicht korrekt umgesetzt wurde (4). Vermutlich wird über den Vergleich der Figuren der Reflexionsprozess in Gang gesetzt, als $S_7$ sich setzt und die Figurenfolge mehrere Sekunden von der Seite betrachtet. Und seine Augen dabei auf die Höhe der Figurenfolge auf dem Tisch bringt. $S_7$ korrigiert seine Angaben (5) und lässt damit das Ergebnis seines Reflexionsprozesses erkennen. Der Impuls dazu geht nicht von I., sondern von $S_7$ selbst aus. $S_7$ kann aufgrund der enaktiven Darstellungsebene das Bauwerk problemlos ab- und wieder neu aufbauen. Der Reflexionsprozess führt zum korrekten Ergebnis (6).

**Beispiel 5: Reflexionsprozess Unterscheidung gerade – ungerade Zahl mit Korrektur der Aussage**

$S_2$ im Beispiel 5 gibt im Interview mehrmals Hinweise auf erkennbare Reflexionsprozesse. Im Beispiel von Schritt 4 formuliert $S_2$ zunächst eine (fehlerhafte) Erkenntnis zur Verallgemeinerung, die er mit „geraden“ und „ungeraden“ Zahlen in Verbindung bringt und nach einem eigenständigen Reflexionsprozess korrigiert, ohne dass diesem ein direktes Nachfragen der Interviewperson vorausgegangen wäre:

| | | |
|---|---|---|
| 7 | I | Wie muss deine Erklärung heißen, dass sie immer funktioniert? |
| 8 | $S_2$ | Ich hab`, ich habe da einfach so das (nimmt von der 4. Figur den obersten Würfel weg und legt ihn wieder hin. Nimmt dann neue Würfel aus der Kiste und wendet sich der 5. Figur zu. Legt in die untere Reihe jeweils rechts und links einen Würfel an und „ummantelt“ Figur 5 zur 36iger Treppe) Z. B. wenn man diese Treppe hier wegnehmen würde (nimmt von der neu gebauten 36iger-Treppe rechts außen einen Würfel weg, danach die ganze Ummantelung), dann ist das wieder 25. Und so ist das |

wie eine Belagsschicht. Dann habe ich so einfach plus gerechnet, also plus, 16.

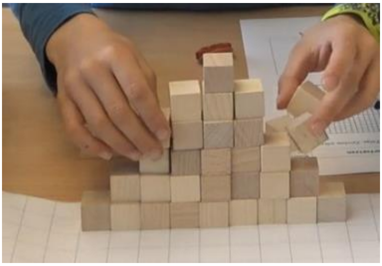


Abb. 4: Reflexionsprozess in Bezug auf die Bauschrift der Folge

| | | |
|---|---|---|
| 9 | I | Und gilt die Regel oder der Trick immer? |
| 10 | $S_2$ | Nein, das hier ist eine gerade Zahl (nimmt die Würfel der 4er-Treppe in die Hand). Und das ist nicht eine gerade Zahl (zeigt auf die 9er-Treppe). Und wenn ich hier (zeigt auf die 9er-Treppe) 4 Würfel dazu nehme (legt die 4 Würfel der 2. Figur rechts und links bei der 9er-Treppe an), dann geht es nicht. Wenn man bei dem auch eine Schicht machen möchte mit 4 (nimmt die 4 zur 9er-Treppe dazu gelegten Würfel wieder weg), dann würde das nicht gehen. |
| 11 | I | O.k. wie viele bräuchte ich dann da? |
| 12 | $S_2$ | Für eine neue Schicht (zählt mit dem Finger die Anzahl an Würfeln der 9er-Treppe in der äußersten Schicht ab, indem er jeden Würfel in die Luft antippt (Ummantelungsschicht)) 7. |
| 13 | I | O.k. und beim nächsten? |
| 14 | $S_2$ | (tippt bei der 4. Figur die Außenwürfel an) 9. |
| 15 | I | Und beim nächsten? |
| 16 | $S_2$ | Bei dem? (zeigt auf die 5. Figur) 16. |
| 17 | I | Aha, o.k. |
| 18 | $S_2$ | Doch (!), es geht auch bei einer ungeraden Zahl. (nimmt die 9 Würfel der 9er-Treppe und legt sie um die 16er-Treppe.) Das hier würde jetzt ein 25iger geben. (Schaut die neu entstandene Treppe an und vergleicht mit der 36er Figur. Bemerkt, dass die beiden Figuren nicht gleich gross sind und zählt die Würfel der 25iger-Figur durch). 25 aha! |

$S_2$ geht im Beispiel die Aufgabe sehr motiviert an und versucht gegenüber I., seine Gedankengänge zu erläutern. $S_2$ formuliert (zunächst fehlerhafte) Erkenntnisse (8), überprüft diese Aussagen am konkreten Material und revidiert diese dann erneut (18): „Doch, es geht auch bei einer ungeraden Zahl".

Im nächsten Beispiel wird deutlich, dass die Kinder auch noch andere Begründungsideen (vgl. Abschnitt 3.3) als „Anhängen", „Ummantelung" etc. in Betracht ziehen und einer Prüfung unterziehen. Im vorliegenden Beispiel führte die Prüfung zu einer korrekten Aussage. Der deutlich gewordene eigenständige Reflexionsprozess wirkt sich positiv auf die gezeigte Begründungskompetenz aus.

**Beispiel 6: „Immer plus 9" kann nicht stimmen**

In Beispiel 6 genügt bereits die Nachfrage der Interviewerin (12), um bei $S_3$ einen eigenständigen Reflexionsprozess in Gang zu setzen (13). Darüber hinaus erhält man keine weiteren Hinweise auf das Denkkonzept von $S_3$, obwohl I. nachfragt (14). $S_3$ antwortet nicht, kommt aber am Ende der Reflexion auf das korrekte Ergebnis (15). Der auch für Außenstehende erkennbare Reflexionsprozess, der durch die Anwesenheit und die Nachfrage von I. initiiert, aber nicht beeinflusst wird, wirkt sich positiv auf das Resultat der Frage „Aus wie vielen Würfelchen besteht die 7. Figur?" aus.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | I | Also immer 9 dazu? |
| 11 | $S_3$ | (Nickt mit dem Kopf). |
| 12 | I | Ist das immer so? |
| 13 | $S_3$ | (Nickt mit dem Kopf und schaut die 5 Figuren vor sich an). Oder warte, nein, (zählt die Ummantelung bei der 3. Figur, dann bei der 2. Figur, danach bei der 4. Figur, danach nochmals bei der 3. Figur). Hä? Kann ich es hier auch aufzeichnen? |
| 14 | I | Was überlegst du? |
| 15 | $S_3$ | Aha. (Malt die Figuren von unten nach oben). Jetzt habe ich das Resultat 49. |

**Beispiel 7: Reflexionsprozess „Einblick in fehlerhafte Bauvorschrift"**

Beispiel 7 gewährt einen Einblick in ein zunächst nicht korrektes Fortführen der Figurenreihe. $S_{10}$ wählt die ikonische Repräsentationsform.

Ähnlich wie in einer schriftlichen Erhebung bei Schritt 1, spricht I. nicht mit $S_{10}$, nachdem die Aufgabenstellung vorgelesen wurde. $S_{10}$ kann im Anschluss an die Aufgabenstellung die Figurenreihe nicht korrekt fortführen (2). $S_{10}$ hat zwar ein Muster erkannt, setzt dieses aber nicht vollständig korrekt um, obwohl er ins Stocken kommt, das Weiterzeichnen für mehrere Sekunden unterbricht, damit einen Reflexionsprozess erkennen lässt (2) und sein Vorgehen aufgrund dieser Selbstreflektion zu korrigieren versucht (2). Dies bestätigt erneut die Vermutung, dass das bloße Nachfragen in mündlichen Situationen dazu führen kann, dass der Lernende sein Vorgehen nochmals reflektiert und bestenfalls selbständig in die richtige Richtung korrigiert.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | I | Führe fort. |
| 2 | $S_{10}$ | (Beginnt zu zeichnen, zunächst sechs Kästchen im untersten Stockwerk). Ok. Das ist nicht schwierig. Das ist dann so (zeichnet fehlerhafte vierte Figur mit sechs Kästchen in der untersten Ebene. Bemerkt nicht, dass die vierte Figur nicht korrekt ist und zeichnet die fünfte Figur beginnend mit sieben Kästchen im untersten und vier Kästchen im dritten Stockwerk. Unterbricht das Zeichnen für mehrere Sekunden, stockt. Korrigiert die fünfte Figur und weitet das unterste Stockwerk auf acht Kästchen, später auf neun aus.) |

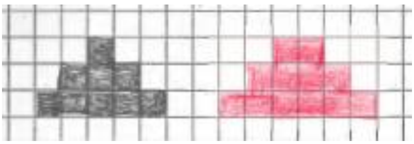


Abb. 5: Einblick in feherhafte Bauvorschrift

## Beispiel 8: Reflexionsprozess „Repräsentationsform ändern"

Es gibt auch Fälle, in denen der eigenständige Reflexionsprozess dazu führt, dass ein Kind die zuvor gewählte Repräsentationsform ändert. Im Beispiel führt allein die Nachfrage I: „Kannst du mir erklären, wie man auf die Anzahl kommt, ohne dass man es zeichnet, nur durch Überlegen?" (8) bei $S_9$ zu einem Reflexionsprozess (2), der zu einem Wechsel der Repräsentationsebene vom ikonischen zum symbolischen Darstellen führt. Diese (Wahl-)möglichkeit bietet sich in einer schriftlichen Befragung nicht. Später heißt es: „Ah, die sechste gibt es gar nicht. Es gibt nur eigentlich fünf. Die sechste müsste man auch noch zeichnen“ (11). Diese Reflexion, erkennbar durch ein deutliches „Ah…“ führt $S_9$ zu einem korrekten Ergebnis, „Und jetzt zusammenrechnen“ (18). So kann $S_9$ von der symbolischen Repräsentationsform profitieren, während ihr die Darstellung des siebten Bauwerks auf ikonischer Ebene aufgrund fehlender Karovorgaben Mühe bereitet.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | I | Wie viele Häuschen braucht man für die 7. Figur? |
| 2 | $S_9$ | Ich fange an mit 11 und dann male ich hoch, immer eins weniger, also hier (beginnt weiter zu zeichnen, stockt aber, die Karokästchen reichen nicht aus). Hä, jetzt komme ich nicht mehr draus (zählt nochmals in ihrer Zeichnung die Anzahl an Kästchen im zweiten Stockwerk nach). |
| 3 | $S_9$ | Oh, hier oben habe ich eins zu viel (malt die Figur fertig). Oh, das sind viele Steine (zählt nochmals nach, korrigiert erneut die Zeichnung. Zählt die Steine von unten nach oben, indem jeder Stein einzeln angetippt wird). 39. |
| 4 | I | 39? Schreibst du es hin? |
| 5 | $S_9$ | Es sind 39?. |
| 6 | $S_9$ | (Schreibt auf das Blatt „Es sind 39“). |
| 7 | I | Kannst du mir erklären, wie man auf die Anzahl kommt, ohne dass man zeichnet, nur durch Überlegen? |
| 8 | $S_9$ | Ich könnte hier die paar Stöcke dazu tun (zeigt auf das fünfte Bild ihrer Zeichnung und deutet die Vergrößerung der Figur mit Zeigefinger und Mittelfinger an). |
| 9 | I | Wie würdest du das dann machen? Erkläre mir das. |
| 10 | $S_9$ | *(Schaut auf die Zeichnungen)*. Ah, die sechste gibt es gar nicht. Es gibt nur eigentlich fünf. Die sechste müsste man auch noch zeichnen. Die sechste hätte 11. Nein, jetzt komme ich draus. Die sechste |

hätte 11, die siebte hätte 13 unten und oben noch mehr.

Abb.6: Ikonische Darstellung stösst an Grenzen

| | | |
|---|---|---|
| 11 | I | Aha, 13. |
| 12 | $S_9$ | Und oben hat es 11, dann hat es 9. |
| 12 | $S_9$ | 11, 9 (schreibt 11, 9 symbolisch untereinander auf das Blatt). |
| 14 | I | Mit 13 hast du angefangen. |
| 15 | $S_9$ | Ja, 13. |
| 16 | I | 13 hast du als erstes gesagt. |
| 17 | $S_9$ | 13, 11, 9 (schreibt die Zahlen untereinander auf das Blatt), 7, 5, 3 und das 1. Und jetzt zusammenrechnen (überlegt, rechnet im Kopf), 47 ähm 49 (schreibt 49 neben die Rechnung). |

### *d) Mathematisches Darstellen durch Gesten (MD)*

Zum Abschluss stellt sich die Frage, welche mathematischen Darstellungsmittel und Gesten sich bei mündlichen Argumentationen identifizieren lassen?

Betrachtet man die 40 Teilschritte der 10 Kinder beim mündlichen Begründen, so lässt sich feststellen, dass in 70 % dieser erhobenen Begründungsschritte mathematisches Darstellen via Gesten zu erkennen ist. Die Kinder versuchen dabei gestisch zu verdeutlichen, was sie nicht schreiben bzw. sagen möchten oder können. Sie nutzen ihre Finger, die ganze Hand, den Kopf oder auch Ganzkörpergesten, wie die folgenden Beispiele zeigen.

### Beispiel 9: Auszählen von Mengen

Zählvorgänge werden auf den Videos durch „gestisches Antippen in die Luft“ (Abb. 7), „Nicken mit dem Kopf“ oder „Zählen in die Luft“ als 1:1-Zuordnung oder als „Zählen in Zweierschritten“ verdeutlicht.

Abb. 7: Zählen durch Antippen in die Luft

### Beispiel 10: „Fibonacci-Strategie“

$S_2$ wendet in diesem Beispiel eine Strategie analog zum Aufbau der Fibonacci-Folge an. Dabei wird die Anzahl an Würfeln einer neuen Figur über die Summe an Würfeln in den beiden vorhergehenden Figuren ermittelt. Diesen Vorgang verbalisiert er nicht, zeigt ihn aber anhand von zählenden Gesten (Abb. 8). Ohne Nachfragen der Interviewperson bzw. ohne die Möglichkeit seine Gestik einsetzen zu können, wäre diese (fehlerhafte) Strategie vermutlich nicht erkannt worden, denn das Ergebnis 41 als Anzahl an Würfeln in Figur 6 lässt den Bezug zum Vorgehen nicht direkt erkennen.

Abb. 8: Anzeigen der „Fibonacci-Strategie“

### Beispiel 11: Geometrische Eigenschaften einzelner Figuren darstellen

$S_4$ möchte hier zeigen, wie sein Bauwerk aufgebaut ist und verwendet dazu entsprechende Gesten mit mathematischem Bezug. Er beschreibt, dass sich die einzelnen Folgeglieder der Folge nach oben zuspitzen (vgl. Abb. 9).

Abb. 9: Anzeigen einer geometrischen Form

Auch geometrische Eigenschaften wie beispielsweise orthogonal (senkrecht zueinander), waagrecht, treppenförmig, hoch, breit etc. werden in den Videos gestisch zum Ausdruck gebracht.

### Beispiel 12: Geometrische Eigenschaften der ganzen Folge darstellen

Ein weiteres Beispiel zeigt, wie Gesten als mathematische Darstellungsmittel zur Veranschaulichung der gesamten Folge fungieren können, nämlich dann, wenn konkrete Materialien nicht mehr in der notwendigen Anzahl zur Verfügung stehen.

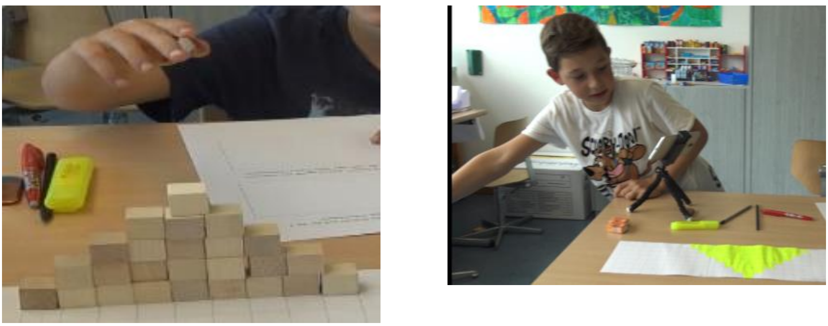


Abb. 10: Anzeigen einer prognostizierten Höhe oder Breite.

Die Gestik dient in diesem Beispiel dazu, die Höhe und Breite eines gedanklichen Bauwerks zu veranschaulichen, ebenso wird ein rechter Winkel dargestellt (22).

**Beispiel 13: Vergleich von Figuren in Bezug auf ihre Höhe darstellen**

Ein anderes Kind ($S_6$) zeigt gestisch sehr deutlich, welche Gedanken er sich wohl bei seiner Argumentation gemacht hat (Abb. 11). Er vergleicht die beiden Bauwerke und visualisiert diesen Vergleich gestisch, indem er die Höhen der Figuren mit Hilfe seiner Hand vergleicht (Abb.11).

Abb. 11: Vergleichen von Höhen mittels Gestik

## 6. Diskussion und Ausblick

Mathematisches Argumentieren ist eine wichtige Kompetenz, die gemeinsam mit den Lernenden entwickelt und zu einem späteren Zeitpunkt auch von Lehrpersonen summativ oder formativ beurteilt werden muss. Welche Chancen können dabei dem mündlichen Argumentieren zugesprochen werden?

### 6.1 Beantwortung der Fragestellungen und Konsequenzen für die Gestaltung von Mathematikunterricht

Die Fallbeispiele zeigen, dass mathematische Kompetenzen von jüngeren Lernenden entlang der gewählten Kriterien auch in mündlichen Settings gut beschrieben werden können. Es gelingt ihnen auffallend häufig, eine vollständig korrekte Antwort beim Begründen eines Zusammenhangs zu zeigen. Zudem durchlaufen alle Kinder in den mündlichen Situationen sämtliche vier Schritte mathematischen Argumentierens (vgl. 2.3). Dass dies nicht selbstverständlich ist, zeigen die Ergebnisse von Brunner

(2019b) bei einer schriftlich durchgeführten Aufgabenbearbeitung derselben Art. Gründe dafür könnten im sozialen Setting eines Gesprächs zu finden sein, was dafür spräche, mündliches Argumentieren häufiger im Unterricht zu integrieren. Wovon darf eine Lehrperson dabei ausgehen?

1) Auch in mündlichen Situationen können alle Argumentationsschritte eingefordert werden (vgl. Abschnitt 2.3).

Eine Beschreibung entlang solch vielschichtiger, voneinander unabhängiger Aspekte ermöglicht einen Einblick in den Denkprozess von Lernenden und würdigt das fertige Produkt, das nicht zwingend als vollständiges Durchlaufen sämtlicher Denkschritte charakterisiert sein muss.

2) Lernende dürfen die Möglichkeit des Nachfragens haben (vgl. Bsp. 1, Tab.4).

Es hat sich gezeigt, dass einige Kinder im Interview die Möglichkeit nützen, um in Bezug auf die Aufgabenstellung bei der Interviewperson nachzufragen. Dies reduziert ein frühes Scheitern aufgrund eines nicht oder nicht korrekt verstandenen Aufgabentextes markant und ermöglicht zudem eher ängstlichen Kindern, sich zu vergewissern, auf dem „richtigen Weg" zu sein, um anschließend selbstständig weiterarbeiten zu können. Nachfragen zu können scheint aber auch während der Problembearbeitung eine wichtige Rolle zu spielen und sich als leistungsförderlich zu erweisen.

3) Die Lehrperson darf ihre Motivationsfunktion wahrnehmen (vgl. Tab.2).

Gerade die Möglichkeit des Nachfragens, Nachhakens oder auch das Vermitteln eines gezielten Impulses oder Hinweises ist nicht nur im Hinblick auf die Persistenz und Motivation bedeutsam, sondern ermöglicht ebenso sehr im Sinne einer Entwicklung gemäß der Zone der nächsten Entwicklung (Vygotsky, 1969), die momentanen Grenzen des eigenen Denkens zu überwinden und dank der Anregung und des Scaffoldings (Collins et al., 1989; Prediger & Pöhler, 2015) einen nächsten Entwicklungsschritt zu vollziehen. Die Transkriptbeispiele belegen eindrücklich, dass die jungen Kinder im Interview nicht aufgeben und bis zum letzten Schritt den vollständigen Begründungsprozess durchlaufen.

4) Die Darstellungsform darf offen gelassen werden.

Wie Tab. 3 zeigt, nutzen die Kinder v. a. die enaktive Ebene als kognitive Repräsentationsebene. Dies ist in schriftlichen Aufgabensettings nicht möglich. Die Bedeutung dieser Handlungsebene für den Verständnisprozess ist unumstritten und sollte den Kindern, in ohnehin schwer empfundenen Argumentationsprozessen, zur Verfügung stehen. Insbesondere Gesten, die die verbalen Begründungen unterstützen, werden von den Kindern gewinnbringend genutzt.

5) Reflexionsimpulse und Ko-Konstruktionen dürfen zugelassen werden (vgl. Bsp. 4-7).

Man kann in den Beispielen erkennen, dass das Gespräch die Möglichkeit bietet, „eine reflexive Rationalisierungspraxis“ (Krummheuer, 2011, S. 34) zu etablieren. Bereits Impulse wie „Ist das immer so?“ können hier hilfreich sein, um den Reflexionsprozess anzuregen oder in Gang zu halten. Ein weiterer leistungsbegünstigender Faktor könnte die Möglichkeit der gezielten Ko-Konstruktion darstellen. In den Transkriptbeispielen wurde auch deutlich, dass durch Nachfragen der Interviewperson Reflexionsprozesse der Kinder angeregt und ausgelöst wurden und diese zu korrekten Antworten oder Verbesserungen und Präzisierungen fehlerhafter oder unzulänglicher Antworten führen können, ohne dass der Interviewpartner bzw. die Interviewpartnerin eine inhaltliche Erklärung oder einen Hinweis erteilt. Gleichzeitig wurde aber auch deutlich, dass die Anregung zur Reflexion allein noch nicht zwangsläufig zu einer korrekten Lösung führt, auch wenn sich die aktiven, eigenständigen Selbstreflexionen bei den Befragten als Teil der gesamten Ko-Konstruktion in etlichen Fällen als besonders fruchtbar erwiesen haben.

6) Gesten, im Sinne von mathemtischem Darstellen, sollten bewusst im Analyseprozess zugelassen und diagnostiziert werden (vgl. Bsp. 9-13).

Die Rolle der Gesten im Hinblick auf mathematisches Darstellen und das Ausdrücken von Gedanken (Salle & Krause, 2021), die von den jungen Kindern noch nicht oder nicht angemessen in Worte gefasst werden können, wurde ebenfalls in den Transkriptbeispielen deutlich. Die Gesten erweisen sich als simulierte Handlungen (Hofstetter & Alibali, 2008), die Einsichten in das Denken der Kinder ermöglichen. Diese Leistung wird allerdings nur dann gewürdigt, wenn ein Gegenüber vorhanden ist, das die Gesten entsprechend deuten und aufgreifen kann. Didaktisch erweist sich dies als dann besonders förderlich, wenn das kompetente Gegenüber – in diesem Fall die Interviewperson – die durch Gesten angezeigten Sachverhalte und Zusammenhänge verbalisiert und ein sprachliches Modelling vornimmt und damit die kognitive Funktion von Gesten im Mathematikunterricht (Salle & Krause, 20201 bewusst aufgreift und für das individuelle Weiterlernen der Kinder nutzt und damit den Wissensaufbau begünstigt (Schnotz, 2001). Dies bedeutet aber auch, dass in der Aus- und Fortbildung von Mathematiklehrpersonen die kognitive Funktion von Gesten und ihre Bedeutung für das Mathematiklernen thematisiert werden sollte. Ziel müsste es sein, Gesten gewinnbringend in den Lernprozess einzubeziehen, mit den Lernenden über die Funktion von Gesten zu diskutieren und die Bedeutung von Gesten als eine Form des mathematischen Darstellens kollektiv auszuhandeln.

### 6.2 Limitationen und methodische Aspekte

Die vorliegende Studie unterliegt einigen Limitationen. So ist die Stichprobe sehr klein und nicht zufällig gewählt, sondern es handelt sich um Kinder einer Schulklasse, die freiwillig an der Studie teilnahmen. Die Darstellung der ersten Aufgabe anhand der ersten drei Würfelbauwerke beeinflusst zudem u. U. die freie Wahl der Repräsentationsform der Kinder. Dennoch liefern die Ergebnisse interessante Einblicke in die Möglichkeiten mündlichen Argumentierens. Die Kodierung entlang derselben Kategorien für schriftliche und mündliche Begründungsleistungen schafft eine notwendige inhaltliche und methodische Verbindung und theoriegestützte Vorarbeit, um Kompetenzen im mathematischen Begründen gezielt beschreiben und vergleichen zu können und den Beurteilungsprozess dieser komplexen Kompetenz v.a. für jüngere Kinder methodenreicher und damit in seiner Aussagefähigkeit valider gestalten zu können. Interessant wäre nun, Leistungen derselben Kinder in Abhängigkeit der zu bearbeitenden Form – mündliches oder schriftliches Argumentieren – vergleichend zu untersuchen.

### 6.3 Fazit

Die vorliegende Studie verdeutlicht, dass sich Lehrpersonen der spezifischen Rolle des sozialen Settings in der Erhebung, Auswertung und Interpretation mathematischer Kompetenzen bewusst sein müssen. Der zeitliche Mehraufwand von mündlichem Argumentieren scheint bei jüngeren oder sprachlich schwachen Kindern lohnenswert zu sein. Konkret heisst das für Lehrkräfte, dass eine gemeinsame mündliche Bearbeitung zum Aufbau von (neuen) Strategien und Kommunikationsmustern unter Berücksichtigung bestimmter Leitlinien eine gute Ausgangslage darstellt. Erst danach sollte eine anschließend schriftlich erfolgende gemeinsame Formulierung einer Begründung im Sinne eines Bearbeitungsprotokolls erfolgen, bevor weitere, ähnliche Begründungsaufgaben selbstständig schriftlich bearbeitet und die gefundenen Begründungen anschließend auch wieder gemeinsam diskutiert werden. Dabei dürfen altersgemässe mündliche Argumentationsformen für jüngere Kinder nicht länger ignoriert werden. Sie können zum Ausgangspunkt für die gemeinsame Erarbeitung einer tragfähigen Argumentationskompetenz werden.

## Anmerkungen

[1] „Häuschen“ ist der in der Schweiz gebräuchliche Begriff für „Kästchen“.

## Danksagung

Das Forschungsprojekt „MaBeLL-INT“ wurde durch projektgebundene Mittel des Bundes (CH) gefördert. Die ergänzende Interviewstudie konnte dank der Förderung der PHTG realisiert werden. Für sämtliches Bildmaterial liegen die Veröffentlichungsrechte seitens der beteiligten Kinder und deren Erziehungsberechtigten vor, dafür danken wir allen Beteiligten.

## 7. Literaturverzeichnis

Aebli, H. (2011). *Zwölf Grundformen des Lehrens: Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage; Medien und Inhalte didaktischer Kommunikation, der Lernzyklus* (14. Aufl.). Klett-Cotta.

Alibali, M. & Nathan, M. J. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from students’ and teachers’ gestures. *Journal of the Learning Sciences, 21,* 247–286.

Amt für Volksschule des Kantons Thurgau. (2016). *Lehrplan Volksschule Thurgau. Mathematik.* Amt für Volksschule des Kantons Thurgau.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Springer.

Brunner, E. (2018). *Mathematisches Begründen Lehren und Lernen: Intervention (MaBeLL-INT). Projektbeschreibung.* PH Thurgau.

Brunner, E. (2019a). Förderung mathematischen Argumentierens im Kindergarten: Erste Erkenntnisse aus einer Pilotstudie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 40*(2), 323–356. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00146-y

Brunner, E. (2019b). Wie lassen sich schriftliche Begründungen von Schülerinnen und Schülern des 5. und 6. Schuljahrs beschreiben? In S. Krauss, K. Binder & A. Frank (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 1131–1134). VTM.

Brunner, E., Lampart, J. & Jullier, R. (2022). Schriftliches mathematisches Argumentieren in zwei unterschiedlichen Inhaltsbereichen in den Jahrgangsstufen 4–6. *Journal für Mathematik-Didaktik, 43*(2), 463–493. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00197-8

Collins, A., Brown, J. & Newman, S. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Hrsg.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in the honour of Robert Glaser* (S. 453-495). Erlbaum.

Fetzer, M. (2007). *Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule*. Klinkhardt.

Fischer, H. & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (Nachdruck). Profil.

Forgas, J. P. & Jones, R. (1985). *Interpersonal behaviour: The psychology of social interaction*. Pergamon Press.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 389–399.

Hofstetter, A. B. & Alibali, M. (2008). Visible embodiment: Gestures as simulated action. *Psychonomic Bulletin and Review,* 15, 495–514.

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Springer Spektrum.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16.

KMK. (2005). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung*. Luchterhand.

Kosko, K. W. & Zimmerman, S. (2019). Emergence of argument in children's mathematical wrinting. *Journal of Early Childhood Literacy, 19*(1), 82–106.

Krummheuer, G. (2011). Die empirisch begründete Herleitung des Begriffs der „Interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung" (NMD). In B. Brandt, R. Vogel & G. Krummheuer (Hrsg.), *Mathematikdidaktische Forschung am „Center for Individual Development and Adaptive Education". Grundlagen und erste Ergebnisse der Projekte erStMaL und MaKreKi* (Bd. 1, S. 25–89). Waxmann.

Krummheuer, G. & Fetzer, M. (2005). *Der Alltag im Mathematikunterricht. Beobachten. Verstehen. Gestalten.* Spektrum.

Lindmeier, A., Brunner, E. & Grüssing, M. (2018). *Early mathematical reasoning – theoretical foundations and possible assessment.* Research Report, presented at , 6.7.2018. Umea, University. PME 42, Umea.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (11., aktual. u. überarb. Aufl.). Beltz.

McAlpin, L. & Weston, C. (2002). Reflection: Issues related to improving professors' teaching and students' learning. In P. Goodyear & N. Havitana (Hrsg.), *Teacher thinking, beliefs and knowledge in higher education.* Kluwer.

Nippold, M. A. & Ward-Lonergan, J. M. (2010). Argumentative writing in preadolescents: The role of verbal reasoning. *Child Language Teaching and The rapy, 26*(3), 238–248.

O'Halloran, C. L. (2014). *Supporting elementary English language learners' argumentative writing through a functional grammar approach.* University of Michigan.

Peschek, W., Prediger, S. & Schneider, E. (2008). Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule, 50* (20), 1–6).

Piaget, J. (2003). *Meine Theorie der geistigen Entwicklung*. Beltz.

Prediger, S. & Pöhler, B. (2015). The interplay of micro- and macro-scaffolding: An empirical reconstruction for the case of an intervention on percentages. *ZDM Mathematics Education, 47*(7), 1179–1194.

Salle, A. & Krause, C. (2021). Kognitive Funktionen von Gesten beim mathematischen Arbeiten. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42, 123-158.* https://doi.org/10.1007/s13138-020-00169-w

Schnotz, W. (2001). Sign Systems, Technologies, and the Aquisition of Knowledge. In J.-F. Rouet, J. Levonen & A. Biardeau (Hrsg.), *Multimedia Learning. Cognitive and instructional issues* (S. 9–29). Elsevier.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien.* Franzbecker.

Shapiro, L. (2011). *Embodied cognition.* Routledge.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten* (2. Aufl.). Beltz.

Vygotsky, L. S. (1969). *Denken und Sprechen.* Fischer.

Walther, G., Selter, C. & Neubrand, J. (2008). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 16–41). Cornelsen.

Welsing, F. (2018). Grundschulkinder argumentieren mit Anschauungsmitteln – Epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn, *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1951–1954). WTM.

Wilson, A. D. & Golonka, S. (2013). Embodied cognition is not what you think it is. *Frontiers in Psychology, 58*(4), 1–13.

Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik.* Beltz.

**Notation:**
Schoy-Lutz, M. & Brunner, E. (2023). Die Rolle der Mündlichkeit beim mathematischen Argumentieren von Grundschulkindern. *Zeitschrift für Mathematik in Forschung und Praxis*, Nr. 4, https://doi.org/10.48648/70vk-sp31