



Johann Sjuts

Metakognition innerhalb von Aufgaben und Aufgabenbearbeitungen in Mathematik

Zusammenfassung

Metakognition ist sowohl in der Praxis als auch in der Forschung des Lehrens und Lernens von Mathematik ein Thema mit mittlerweile gestiegenem Stellenwert. Metakognition erhöht die Effektivität von Denken und Lernen, aber das Wirksamwerden von Metakognition ist an Bedingungen gebunden. Es gibt weder eine inhaltsfreie noch eine unverbindliche Entwicklung von Metakognition.

Damit eine möglichst ausgeprägte Wirksamkeit entsteht, sind ein gezieltes Bewusstmachen und ein strukturiertes Organisieren des eigenen Denkens sowie ein Analysieren des eigenen Verstehens nötig. Eine Möglichkeit besteht darin, dies über eine passende Art und Gestaltung von Aufgaben zu erreichen.

Der vorliegende Beitrag soll zum einen die Befunde aus der Forschung und zum anderen die Bedeutung von Metakognition im Vollzug aufzeigen. Er gibt zunächst einen Einblick in die Entwicklungsgeschichte von Metakognition im Wissenschaftsgefüge, in die aus der Forschung gewonnenen Erkenntnisse über Metakognition und in die Zusammensetzung des Konzepts Metakognition aus mehreren Komponenten.

Es folgt die Darlegung eines Instrumentariums, das Aufgaben und Aufgabenbearbeitungen für Erhebungen und Analysen nutzt. Zur Sprache kommen dabei Möglichkeiten von Aufgabengestaltung und -umgestaltung zur Anregung von Metakognition, kognitive Verzerrungen, denen es metakognitiv entgegenzuwirken gilt, schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben, ein Ansatz zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen anhand eines entsprechenden Kategoriensystems sowie ein Einstufungssystem zur Intensität metakognitiver Aktivitäten.

Danach wird ein Vorgehen bei zwei im Rahmen von berufsfeldbezogener forschungsorientierter Professionalisierung durchgeführten qualitativ-empirischen

Studien dargestellt und durch beispielhafte Analysen verdeutlicht. Die in dem Zusammenhang entwickelten und erprobten Einordnungssysteme eignen sich, metakognitive Aktivitäten in Aufgabenbearbeitungen ausfindig zu machen und dahingehend zu beurteilen, wie sie sich auf die Lösung von Aufgaben auswirken. Ein Novum besteht darin, metakognitive Aktivitäten auszuweisen, die der Prävention von Unzulänglichkeiten und Verzerrungen in der Aufgabenbearbeitung dienen können.

Es ergeben sich einerseits auf der Hand liegende Untersuchungsvorhaben für die mathematikdidaktische Forschung und andererseits aus den positiven Effekten von Metakognition ableitbare Empfehlungen für ein evidenzbasiertes berufliches Handeln. Überdies lässt sich zum Ausdruck bringen, wie berufliche Fähigkeiten, Aufgaben in Mathematik zu gestalten und Aufgabenbearbeitungen auszuwerten, durch ein forschendes Lernen im Studium bzw. im Vorbereitungsdienst erwachsen können.

Schlagworte

Metakognition; Aufgabengestaltung; Verschriftlichung des Denkens; kognitive Verzerrungen; Kategoriensystem metakognitiver Aktivitäten; forschendes Lernen

1. Einführung

Menschen sind zur Selbstreflexion ihres Denkens und Handelns in der Lage. Sie sind fähig, sich selbst zum Gegenstand ihres Denkens und Nachdenkens zu machen. Insbesondere lässt sich die eigene Kognition, das mit einer Sache beschäftigte Denken, ins Bewusstsein rücken und damit regulieren und kontrollieren. Dafür steht der Ausdruck Metakognition, das Denken über das eigene Denken.

Zu diesem Denken höherer Ordnung gehört auch die aktive Steuerung der mit jedwedem Lernen verbundenen kognitiven Prozesse. Im Hinblick auf die Wirksamkeit von Schule und Unterricht hat Metakognition daher schon seit längerer Zeit Beachtung gefunden. Als Einflussfaktor für erfolgreiches Lernen kommt Metakognition eine der höchsten Effektstärken zu (Wang et al., 1993; Hattie, 2008).

Interventionsstudien haben gezeigt, dass Lernende – sogar mit unterschiedlichen Voraussetzungen – erheblich von Metakognition profitieren. Dies gilt auch und insbesondere für den Unterricht in Mathematik (Schneider & Artelt, 2010; Lingel, Neuenhaus, Artelt, und Schneider, 2014 für eine Übersicht).

Metakognition ist sowohl in der Praxis als auch in der Forschung des Lehrens und Lernens von Mathematik mittlerweile ein Thema mit gestiegenem Stellenwert. Die Mathematikdidaktik befasst sich hinsichtlich Metakognition mit folgenden Fragen:

- Wie lässt sich der Mathematikunterricht, wie lassen sich Mathematikaufgaben gestalten, um metakognitive Aktivitäten der Lernenden zu stimulieren?
- Inwieweit lassen sich metakognitive Prozesse in Unterrichtsgesprächen und in Aufgabenbearbeitungen identifizieren?
- Welchen lernförderlichen Einfluss haben bestimmte metakognitive Aktivitäten?

Bei der Anregung und ebenso der Erforschung von Metakognition ist die wissenspsychologische Beziehung von internen Repräsentationen (Vorstellungen) und externen Repräsentationen (Darstellungen) von wesentlicher Bedeutung (Fischer, 2007; Sjuts, 2016). Denken, Lernen und Verstehen geschehen in einer Wechselwirkung, die sich so beschreiben lässt: Das, was man sich im Kopf zurechtlegt, findet einen Niederschlag in dem,

was man sagt oder zu Papier bringt. Aber es gibt auch einen umgekehrten Zusammenhang. Denn man registriert und mustert zugleich auch das, was man notiert und skizziert hat. Und diese Betrachtung kann einen modifizierenden, reorganisierenden Einfluss auf das Denken haben. So entsteht nicht nur aus der internen eine externe Repräsentation, sondern diese wirkt auch auf jene zurück.

Damit erhalten die beim Denken, Lernen und Verstehen auftretenden Irrtümer und Fehler einen lernförderlichen Wert. Denn sie führen zu Veränderungen und Berichtigungen. Alles in allem ermöglicht diese Wechselwirkung, dass Lernende Fehlerhaftes und Falsches erfassen und beheben, dass sie Flüchtigkeiten und Verzerrungen vorhersehen und vermeiden, dass sie also reaktiv und proaktiv mit Unzulänglichkeiten und Unkorrektheiten umgehen und dass sie am Ende das Richtige wissen und entsprechend zu handeln verstehen.

Für das Tätigkeitsfeld Schule und Unterricht lassen sich daraus einige Schlussfolgerungen ziehen.

Diskursivität in Unterrichtsgesprächen: Metakognition einzelner Schülerinnen und Schüler im Unterricht ist nicht per se lernwirksam. Es kommt darauf an, sie im diskursiven Austausch mit anderen in Unterrichtsgesprächen zu praktizieren. Diese sind so zu arrangieren und zu moderieren, dass metakognitive und diskursive Aktivitäten ihr förderliches Potenzial entfalten (Cohors-Fresenborg, 2012). Bei der Diskursivität geht es um die Einhaltung von Gesprächsregeln und die Nachvollziehbarkeit von Erläuterungen und Begründungen (Kaune und Cohors-Fresenborg, 2010; Nowińska, 2016). Im Unterricht zeigt sich Diskursivität darin, dass die am Gespräch Beteiligten ihre Aussagen und Argumente präzise formulieren und ihre Beiträge durch Bezugspunkte und -personen verankern, dass sie vorhergehende Äußerungen verorten, um Einsicht zu erzeugen, und nachfolgende erwirken, um Verstehen zu sichern. Ziel ist es, durch Bezugnahme und Vergewisserung schließlich für klares und gründliches Erfassen von Sinn und Bedeutung zu sorgen.

Art und Gestaltung von Aufgaben: Übliche Mathematikaufgaben lösen metakognitive Aktivitäten nicht von selbst aus. Damit jedoch eine möglichst ausgeprägte Wirksamkeit entsteht, sind ein gezieltes Bewusstmachen und ein strukturiertes Organisieren des eigenen Denkens sowie ein

Analysieren des eigenen Verstehens nötig. Dies gilt es, über eine passende Art und Gestaltung von Aufgaben (Sjuts, 2021) sicherzustellen. Dreierlei ist getrennt oder kombiniert möglich:

- Die Anforderung, bei der Aufgabenbearbeitung stets und systematisch Metakognition einzubeziehen, kann durch einen didaktisch-sozialen Vertrag (Sjuts, 2003) etabliert werden.
- Nützlich sind bestimmte Aufgaben, denen ein Anstoß zur Metakognition auf besondere Weise innewohnt.
- Überdies lassen sich Aufgabenstellungen um spezifische Aufforderungen zur Metakognition erweitern.

Verschriftlichung von Gedankengängen: Für das schulische Lernen gilt die Verschriftlichung des eigenen Denkens als grundlegende Maßnahme zur Steigerung von Lernwirksamkeit (Sjuts, 2016; 2018). Sie deckt das eigene Denken auf, macht das eigene Denken und Verstehen bewusst und damit regulier- und kontrollierbar. Diese Feststellung untermauert das Gebot, Metakognition überhaupt und vermehrt zu praktizieren.

In Curricula und Schulbüchern findet der Begriff Metakognition Erwähnung, ohne jedoch genau expliziert, spezifiziert oder operationalisiert zu werden. Zu beobachten ist zudem, dass Aufgabenstellungen mit expliziten Aufforderungen zur Metakognition nicht allgemein üblich sind. Eine entsprechende Gestaltung von Aufgaben oder Teilaufgaben ist in Schulbüchern zur Mathematik nur sehr selten anzutreffen. Auch in Schulleistungsstudien, bei Vergleichsarbeiten oder Zentralarbeiten ist keine nennenswerte Berücksichtigung festzustellen.

Trotz gestiegener Aufmerksamkeit für Metakognition ist zu konstatieren: Forschung über Metakognition und Ausübung von Metakognition sind hierzulande nicht stark verbreitet. Damit mangelt es an vertieften Erkenntnissen über erprobte Maßnahmen zur Förderung von Metakognition im regulären Unterricht. Und damit bleiben Möglichkeiten, den Erfolg von Lehren und Lernen zu steigern, ungenutzt.

2. Metakognition in systematischer Einordnung

Metakognition findet sich in verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen. Gegenstand der Forschung ist Metakognition seit etwa einem halben Jahrhundert. Dabei ist ein in der Breite geteiltes Verständnis des aus

mehreren Komponenten bestehenden Konzepts Metakognition entstanden. Mit Metakognition und der Entwicklungsgeschichte im Wissenschaftsgefüge, mit den aus der Forschung gewonnen Erkenntnissen über Metakognition und den Konzeptkomponenten befassen sich die folgenden Abschnitte. Der Überblick soll zum einen die Befunde aus der Forschung und zum anderen die Bedeutung von Metakognition im Vollzug aufzeigen.

2.1 Metakognition im Wissenschaftsgefüge

Der Begriff Metakognition (*engl. metacognition*) geht auf Flavell (1976) zurück. Zunächst untersuchte die *Allgemeine Psychologie*, inwieweit Menschen ihre eigenen kognitiven Aktivitäten kennen und damit auch kontrollieren und steuern, inwieweit sie also über eigenes Metawissen und eigene Metastrategien verfügen. So rückten Selbstregulationen (Boekarts, 1996; 1999), Lernstrategien (Artelt, 2000; Artelt und Moschner, 2005) sowie Verstehensleistungen und Behaltensleistungen (Weinert und Kluwe, 1984) in den Mittelpunkt. Hinzu kamen spezifischere Untersuchungen über Text- und Leseverstehen (Christmann und Groeben, 1999; Schiefele, Artelt, Schneider und Stanat, 2004) und Problemlösen (Aebli, Ruthemann und Staub, 1986; Schoenfeld, 1992; De Corte, Verschaffel und Op't Eynde, 2000; Kramarski und Mevarech, 2003). Zur Erforschung der Möglichkeiten zur Förderung von Metakognition entstanden Trainingsprogramme für verschiedene Zielgruppen. Sie unterschieden sich hinsichtlich Vermittlung, Aneignung und Einsatz von Metakognition. Teils waren sie domänenunabhängig, teils domänen-spezifisch.

Auch die *Entwicklungspsychologie* hat sich schon früh damit befasst, wie – altersbezogen – Metakognition entstehen und zum Tragen kommen kann und inwieweit Fördermaßnahmen in Abhängigkeit von kognitiven Voraussetzungen Erfolge zeitigen (Schneider und Hasselhorn, 1988).

Im Kontext der mentalen Modellbildung stellt die *Wissenspsychologie* mit mentalen Wissensrepräsentationen einen grundlegenden Begriff bereit (Einsiedler, 1996). Mentale Wissensrepräsentationen bilden einen Anhaltspunkt für metakognitive Prozesse beim Aufbau und bei der Speicherung von Wissen sowie beim Zugriff und bei der Verknüpfung dieses Wissens.

Ebenso ist auf die *Kognitionspsychologie* zu verweisen. Ihr zufolge gilt es, den im schnellen Denken auftretenden kognitiven Verzerrungen und

Flüchtigkeiten (Kahneman, 2012) mit langsamem Denken entgegenzuwirken. Hier kommt dem kritischen Denken (Stanovich und Stanovich, 2010; Pfister, 2020) und damit der Metakognition eine entscheidende Bedeutung zu.

Als Teildisziplin der *Kognitionswissenschaft* widmet sich die *Kognitive Linguistik* dem Zusammenhang zwischen Sprache und Denken. Denken kommt über mentale Modelle in der Sprache zum Ausdruck. Umgekehrt bilden insbesondere Metaphern und Sprachbilder wahrnehmungsbestimmende und denkhandlungsstützende Erinnerungen und Vorstellungen (Lakoff & Johnson 2011). Sie sind dem Bewusstsein zugänglich und können daher zum Gegenstand von Metakognition werden.

Bewusstes Denken ist ferner in den *Kognitiven Neurowissenschaften* ein Forschungsgebiet. Um kognitive Prozesse in Form von neuronalen Aktivitäten verschiedener Gehirnareale zu untersuchen, setzt die *Neuropsychologie* (beispielsweise) bildgebende Verfahren ein, dies insbesondere zum mathematischen Denken (Dehaene, 2014). Aber auch metakognitive Funktionen des Gehirns versucht man zu erfassen (Fleming, 2021), wengleich die neuronale Grundlage als komplex und vielschichtig gilt. Einen Nutzen erwartet man davon indes nicht nur für die Erforschung strategischer Fähigkeiten, sondern ganz grundsätzlich für eine effektive und kluge Selbsterkenntnis. Mit dem Rückgriff auf die antike griechisch-römische Forderung „Erkenne dich selbst.“ hat Metakognition in der *Philosophie* sogar eine zweieinhalbtausendjährige Vorgeschichte.

2.2 Metakognition und ihre Komponenten

Metakognition galt zunächst als ein „unscharfes“ (Flavell, 1981), ein „geheimnisvolles“ und „vielschichtiges“ (Brown, 1984) Konzept, als ein „griffiges Etikett“ (Kluwe und Schiebler, 1984).

Dennoch richtete sich schon früh das Augenmerk darauf, Komponenten von Metakognition begrifflich zu fassen (Flavell, 1976; 1981; 1984). Schlüsselbegriffe waren zunächst metakognitives Wissen (*engl. metacognitive knowledge*) und metakognitive Empfindung (*engl. metacognitive experience*), dann metakognitive Überwachung (*engl. metacognitive monitoring*). Von einer höheren Ebene aus betreffen sie also die eigenen kognitiven Bemühungen, Prozesse und Produkte, über die man selbst Wissen besitzt, deren Ziel und Zweck man selbst verfolgt und die man selbst steuert und kontrolliert. Metakognition ist dafür der zusammenfassende Begriff.

Als übergeordnetes Konzept ist Metakognition somit Kognition höherer Ordnung (Hasselhorn und Artelt, 2018). Gegenstand der Metakognition sind kognitive Vorgänge, Zustände und Mechanismen. Es ist offensichtlich, dass Metakognition für das Lernen von besonderer Bedeutung ist.

Metakognition wird heutzutage vor allem verstanden als das Wissen und die Kontrolle über das eigene kognitive System. Mit dem Denken über das eigene Denken sowie der Steuerung des eigenen Denkens hat Metakognition folglich eine deklarative und eine prozedurale (exekutive) Komponente. Hinzukommen muss indes die Aufmerksamkeit für entsprechende Erfahrungen und Willensleistungen, also eine motivationale (sensitive) Komponente. Verkürzt soll damit von deklarativer, prozeduraler und motivationaler Metakognition die Rede sein.

Die deklarative Metakognition beinhaltet das Wissen eines Menschen über eigene kognitive Gegebenheiten und Abläufe (Hasselhorn und Artelt, 2018). Metawissen bezieht sich auf Personen-, Aufgaben- und Strategievariablen. Es umfasst somit zum einen das diagnostische Wissen, das jemand über das eigene Denken besitzt, zum anderen das bewertende Wissen über Aufgaben und Anforderungen und zum Weiteren das strategische Wissen über Lösungswege und Erfolgsaussichten.

Das Metawissen und damit die Entwicklung des so genannten Metagedächtnisses spielen eine Rolle bei Lern- und Gedächtnisleistungen, also bei Anforderungen des Einprägens, Behaltens und Erinnerns. Im günstigsten Fall sind einem Menschen die eigenen Stärken und Schwächen bekannt. Urteilsvermögen dagegen ist gefragt bei der Einschätzung der Schwierigkeiten, die eine gestellte Aufgabe enthält. Eine Bewertung bezieht sich selbstverständlich auf die Aufgabe selbst, vor allem aber auf das Verhältnis zwischen eigenem Leistungsstand und Aufgabenschwierigkeit. Von Bedeutung ist zudem ein Wissen über Strategien, darüber, ob sich Lösungsideen zur Bewältigung einer Aufgabe eignen, darüber, wie wirkungsvoll bestimmte Vorgehensweisen sind.

Die prozedurale Metakognition verbindet die vor, während und nach einer Aufgabenbearbeitung liegenden Tätigkeiten des Planens, Überwachens und Überprüfens, bei denen eine Person sich gewissermaßen selbst über die Schulter blickt. Laut zu denken oder das eigene Denken und Handeln zu protokollieren, sind Regulation und Kontrolle unterstüt-

zende Methoden. Eine Wirkung von Vorausschau, Innehalten und Rückschau kann schließlich darin liegen, die eigene Position zu überdenken und gegebenenfalls zu verändern.

Zur motivationalen Metakognition gehören Bereitschaft und Gespür (Hasselhorn und Artelt, 2018) als unentbehrliche Voraussetzung. Es müssen Motivation und Willenskraft für den Einsatz metakognitiver Strategien vorliegen. Oder sie müssen entwickelt werden, etwa dadurch, dass die Lösung einer gestellten Aufgabe als Herausforderung empfunden wird. Ebenso ist ein Gespür für das Leistungsvermögen eigener kognitiver Aktivitäten unerlässlich. Eine solche Sensibilität ist Folge metakognitiver Erfahrungen. Denn aus diesen Erfahrungen resultieren Fähigkeiten zur Introspektion und zur Einschätzung einer zweckmäßigen Nutzung des eigenen deklarativen und prozeduralen Metawissens.

Eine Übersicht in Anlehnung an Scott und Levy (2013, S. 123) enthält die Tabelle 1.

Bezeichnung	Komponente	Beschreibung	Prozessphase
Deklarative Metakognition	Nutzung von Wissen	Wissen über eigenes Denken, über Aufgaben und über Strategien	vor, während, nach
Prozedurale Metakognition	Planung	Erkennen der Existenz und der Art der Herausforderung und Entscheidung über eine Strategie zur Bewältigung	vor
	Steuerung und Überwachung	Regulation im Vorgehen bei der Bearbeitung einer bestimmten Aufgabe Kontrolle auf der Grundlage des aktuellen Fortschritts des eigenen Denkens	während
	Überprüfung	Rekapitulation und Reflexion der Vorgehensweise und des Ergebnisses	nach
Motivationale Metakognition	Sicherung von Selbstwirksamkeit	Aufrechterhaltung von Aufmerksamkeitsbereitschaft und Willenskraft zum Denken über sich selbst	vor, während, nach

Tabelle 1: Metakognition und ihre Komponenten

Im tatsächlichen Vollzug von Metakognition gibt es ein kompliziertes Zusammenwirken der Komponenten. Dennoch lassen sich sowohl Theorien als auch Messungen mit unterschiedlichen Komponentenbündelungen

gewinnbringend für die unterrichtliche, pädagogische und schulpsychologische Arbeit nutzen (Scott und Levy, 2013).

2.3 Frühe und spätere Erkenntnisse über Metakognition

Einhergehend mit den früh geäußerten hohen Erwartungen an Metakognition und den bald darauf in Studien bestätigten erheblichen Wirkungen von Metakognition hat schon die Allgemeine Psychologie einen Doppelcharakter herausgestellt: Metakognition erhöht die Effektivität von Denken und Lernen, aber das Wirksamwerden von Metakognition ist an Bedingungen gebunden.

Schon recht früh wies Weinert (1984) auf einen Zusammenhang zwischen der Schwierigkeit einer Aufgabe und dem individuellen Lösungsverhalten hin. So macht bei leicht zu lösenden Aufgaben die Metakognition, die Personen dabei aktivieren, keinen nennenswerten Unterschied. Anders ist es bei als schwierig empfundenen Aufgaben. Da kann eine metakognitive Analyse zu dem Ergebnis führen, die Lösung einer Aufgabe wegen geringer Erfolgswahrscheinlichkeit gar nicht in Angriff zu nehmen. Ausichtsreich ist der metakognitive Aufwand dagegen bei mittelschweren Aufgaben.

Als wichtig erachteten es Schneider und Hasselhorn (1988), beim Lernen von Prozeduren und Strategien zum Aufgabenlösen in Mathematik metakognitive Aktivitäten zu integrieren. Dazu schlugen sie vier zu beachtende Instruktionsprinzipien vor. So sollten die Lehrkräfte in Mathematik erstens Strategien explizit lehren, zweitens spezifisches Strategiewissen (zur Auswahl geeigneter Vorgehensweisen beim Aufgabenlösen) aufzubauen helfen, drittens allgemeines Strategiewissen (zur Entwicklung von Anstrengungsbereitschaft) vermitteln und sich viertens um einen systematischen Aufbau mathematischer Grundkenntnisse bemühen.

Versuche, komplexe kognitive Kompetenzen wissensisoliert zu vermitteln, erwiesen sich auch weiterhin als nahezu wirkungslos. Reusser (1998) resümierte daraufhin, dass es keine Denkschulung und kein Lernenlernen unter Umgehung einer fachspezifischen Begriffsbildung und eines fachspezifischen Methoden- und Fertigkeitserwerbs gibt, „dass kein Weg um das zeitaufwendige – auf die abstrakte Systematik von Wissensformen und auf die Charakteristika konkreter situativer und funktionaler Kontexte gleichermaßen Rücksicht nehmende – Durcharbeiten fachlicher Inhalte einschließlich des methodischen und abstrahierenden

Herauslösens relevanter begrifflich-schematischer und prozesshaft-strategischer Merkmale herumführt“ (Reusser, 1998, S. 152).

Neben der didaktisch-fachlichen ist die sozial-unterrichtliche Einbindung von ausschlaggebender Bedeutung. Kein Vorgehen kann die Entwicklung von Metakognition einfach an die Lernenden übertragen. Selbständiges Lernen erfolgt nicht dadurch, dass fremdgeleitetes Lernen schlicht vermindert wird, ja eine Überbetonung des eigenständigen Lernens verringert sogar dessen Wirkung. Lernende müssen sorgfältig angeleitet und auch überzeugt werden, den Erwerb langfristigen Wissens mit dem Erwerb metakognitiver Kenntnisse und Fertigkeiten zu verknüpfen und das so aufgebaute Wissen wiederum zur Steuerung des eigenen Lernens zu nutzen (Reusser, 1998). Lehrkräften kommt daher die unverzichtbare Aufgabe des Anleitens, Beratens, Unterstützens und Sicherstellens bei der angestrebten Kultivierung von Metakognition zu.

Hinsichtlich des Einflusses von Metakognition besteht zudem ein bemerkenswertes Zusammentreffen von Über- und Unterschätzung (Hasselhorn und Artelt, 2018). Weder Eltern noch Lehrkräfte wenden viel Zeit und Mühe für die Förderung von Metakognition bei Kindern und Jugendlichen auf. Offensichtlich herrscht die Überschätzung vor, dass Metakognition durch tagtägliche Lernerfahrungen gewissermaßen von selbst erworben wird. Ohne gezielte Anregung und Aktivierung bleiben Möglichkeiten aber ungenutzt. Ebenso scheint eine Unterschätzung des lern- und denkbegleitenden metakognitiven Potenzials vorzuliegen. Ohne gezielte Förderung und Vermittlung bleiben Möglichkeiten dann ebenfalls ungenutzt.

Das derzeitige zumindest didaktisch-methodische Fazit lautet: Es gibt weder eine inhaltsfreie noch eine unverbindliche Entwicklung von Metakognition. Anregung und Anwendung metakognitiver Aktivitäten erfolgen, indem Inhaltsbezüge und Unterrichtsabmachungen eingehalten werden (Sjuts, 2003). Lange gab es eine Grundsatzdiskussion, ob Metakognition für sich oder in Verbindung mit bereichsspezifischen Fertigkeiten entwickelt werden sollte. Das Resultat ist, den Erwerb und den Einsatz metakognitiver Aktivitäten und Strategien im substantiellen Kontext anzusiedeln. „Die Vermittlung von Metakognition um ihrer selbst willen kann mittlerweile als überholter Ansatz eingestuft werden.“ (Hasselhorn und Artelt, 2018, S. 525)

Damit erhält die jeweilige Fachdidaktik einen erhöhten Rang, an dieser Stelle die Mathematikdidaktik.

In der Mathematikdidaktik gab es zur Metakognition (noch ohne diesen Begriff) eine überaus bedeutsame (kürzere) Vorgeschichte. Überlegungen darüber, wie sich das eigene Denken und Nachdenken – per Introspektion – ins Bewusstsein heben lässt, finden sich nämlich bereits in den Werken Pólyas zum mathematischen Problemlösen. Hier ist das berühmte geworden Buch „How to Solve It“ (Pólya, 1945) zu nennen. Es war dann vor allem Schoenfeld (1985, 1992), der die Ideen für die Mathematikdidaktik aufgenommen und weitergeführt hat.

Bei der Untersuchung der Lernwirksamkeit von Metakognition lassen sich in der Mathematikdidaktik verschiedene forschungsmethodische Vorgehensweisen finden. Eine wesentliche ist die Methode der Intervention (Kramarski und Mevarech, 2003; Maaß, 2006; Krug und Schukajlow, 2020). Als Grundlage, metakognitive Prozesse zu erfassen, um sie anschließend bezüglich ihrer Effektivität untersuchen zu können, dienen zum einen Fragebogenerhebungen, Selbstberichte, Selbsteinschätzungen, Beobachtungen, Interviews, Fallbetrachtungen und Kombinationen daraus (Cohors-Fresenborg, Kramer, Pundsack, Sjuts, & Sommer, 2010; Vorhölter, 2018; Vorhölter, Krüger und Wendt, 2019). Herangezogen werden zum anderen Transkripte von Unterrichtsgesprächen (Kaune und Cohors-Fresenborg, 2010; Nowińska, 2016) und Dokumentationen von Aufgabenbearbeitungen (Sjuts, 2002; 2003). Auf diese Weise kann Metakognition rekonstruiert, analysiert und quantifiziert (Veenman, Van Hout-Wolters, Afflerbach, 2006; Van der Stel Veenman, Deelen, und Haenen, 2010) werden. Die so aus Untersuchungen erzielbaren Ergebnisse zu transferieren und zu generalisieren, ist indes weiterhin eine hervorgehobene Aufgabe.

3. Bereitstellung eines Instrumentariums zur Untersuchung von Metakognition

Um eine detailliertere Beschäftigung mit Metakognition in Aufgaben und schriftlichen Aufgabenbearbeitungen des Faches Mathematik geht es im vorliegenden Beitrag. Für darauf bezogene Erhebungen und Analysen ist ein geeignetes Instrumentarium bereitzustellen. Es besteht aus mehreren Teilen, die zunächst zur Darlegung kommen, nämlich

- Möglichkeiten von Aufgabengestaltung und -umgestaltung zur Anregung von Metakognition,
- kognitive Verzerrungen, denen es metakognitiv entgegenzuwirken gilt,
- schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben,
- ein Ansatz zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabebearbeitungen anhand eines entsprechenden Kategoriensystems sowie
- ein Einstufungssystem zur Intensität metakognitiver Aktivitäten.

Dabei finden vor allem zwei neuere Studien (Schürstedt, 2021; Hiegeist, 2022) Berücksichtigung.

3.1 Aufgabengestaltung und -umgestaltung zur Anregung von Metakognition

Beim Lehren und Lernen von Mathematik haben Aufgaben eine hervorgehobene Bedeutung (Leuders, 2015). Aufgaben lassen sich einsetzen, um Denken, Lernen und Verstehen zu steuern. Mittels Aufgabebearbeitungen sollen Wissen und Können auf- und ausgebaut werden. Ziel ist dabei ein hohes Maß an Verfügbarkeit und Erweiterbarkeit von Wissen und Können. Damit es in Aufgabebearbeitungen zu entsprechenden Effekten kommt, ist eine möglichst organisch erzeugte denk- und lernbegleitende Metakognition vonnöten (Sjuts, 2001; 2006; 2008; 2016; 2021).

Drei Möglichkeiten seien genannt, wie Metakognition mittels Aufgaben in Gang kommen kann. Erstens ist es die – unausgesprochene – Anforderung, Metakognition „permanent“ (Kaiser, Kaiser, Lambert und Hohenstein, 2018, S. 24) in jeder Aufgabebearbeitung zu praktizieren. Hier sind metakognitive Strategien (Sjuts, 2018) hilfreich. Zweitens eignen sich Aufgaben mit immanenten Impulsen (Sjuts, 2021). Derartige Aufgaben stimulieren Metakognition durch die ihnen innewohnenden Verunsicherungen und Verführungen, durch die in ihnen enthaltenen auslösenden Momente, ein unbedachtes Vorgehen zu hinterfragen, zu überdenken und zu revidieren. Drittens lässt sich Metakognition durch explizit formulierte Aufgabenstellungen auslösen. In allen Fällen ist indes eine Einsicht in die Notwendigkeit, Denk-, Lern- und Verstehensprozesse stets mit hoher Aufmerksamkeit zu überwachen, von wesentlicher Bedeutung.

Die drittgenannte Möglichkeit sei nun näher dargelegt, die Erweiterung von Aufgabenstellungen um spezifische metakognitive Aktivitäten. Darin geht es um ausdrückliche Aufforderungen zum Explizieren, Variieren, Formalisieren, Analysieren, Synthetisieren (Sjuts, 2021).

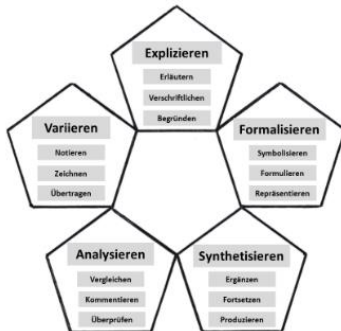


Abbildung 1: Das Fünferfeld metakognitiver Aufgabenstellungen

▪ *Explizieren (Erläutern – Verschriftlichen – Begründen):*

Erläutern kann Unsichtbares sichtbar werden lassen. („Erläutere deine Überlegungen.“) Verschriftlichen macht Handeln und Denken bewusst. („Beschreibe dein Vorgehen.“) Begründen präzisiert den Gedankengang. („Begründe dein Ergebnis.“)

▪ *Variieren (Notieren – Zeichnen – Übertragen):*

Variieren der Darstellung deckt das Denken auf. („Schreibe eine Rechnung dazu auf.“ „Fertige eine zeichnerische Darstellung an und beschrifte sie.“) Aufgaben mit mehreren Lösungswegen lassen individuelles Denken zum Ausdruck kommen. Übertragen in eine andere Darstellungsform kann die Lösungswahrscheinlichkeit erhöhen.

▪ *Formalisieren (Symbolisieren – Formulieren – Repräsentieren):*

Formalisieren unterstützt mathematisches Denken. Formalisieren reduziert Komplexität und schafft Durchschaubarkeit. Formulieren verdeutlicht das Erfassen und Vorstellen formaler Ausdrücke. Die Auseinandersetzung mit Wissensrepräsentationen (Schreibweisen, Äußerungen) ist zentral für metakognitive Aktivitäten.

▪ *Analysieren (Vergleichen – Kommentieren – Überprüfen):*

Erörterndes Vergleichen von Aufgabenbearbeitungen mit verschiedenen Darstellungen und Ergebnissen klärt auch das eigene Denken. Analysieren und Kommentieren von Fehlvorstellungen oder Dialogen anderer dienen der Selbstförderung. Zweckmäßig sind Aufgaben zur Selbstüberprüfung der eigenen Überlegungen. („Du wirst gefragt, wie du die Richtigkeit sicherstellst. Wie antwortest du?“)

▪ *Synthetisieren (Ergänzen – Fortsetzen – Produzieren):*

Ergänzungen, Fortsetzungen und Zusammensetzungen (vorgegebener Lösungsansätze) stimulieren das eigene Denken. Das Finden unterschiedlicher Lösungswege ist eine wirkungsvolle Form des Festigens. Das Produzieren ist Ausdruck eines verständnisintensiven Lernens.

Das Diagramm mit dem Fünferfeld (Abbildung 1) fasst die Gestaltungskategorien für metakognitive Aktivitäten zusammen. Hinzuweisen ist darauf, dass diese sich nicht trennscharf voneinander unterscheiden. In- des kann es auch sinnvoll sein, sie ausdrücklich zu kombinieren.

Die erweiterten Aufgabenstellungen zielen darauf ab, dass Lernende bei der Aufgabenbearbeitung in bewusster Weise agieren (Schürstedt, 2021; Hiegeist, 2022). Und schließlich soll dies ganz selbstverständlich werden.

3.2 Kognitive Verzerrungen

Nicht nur beim Lernen schlechthin kann Fehlerhaftes und Falsches auftreten, sondern gerade bei der Bearbeitung einer gestellten Aufgabe aufgrund der in ihr enthaltenen Verleitungen, die auf Eigenarten des menschlichen Denkens beruhen.

In der Kognitionspsychologie spricht man von zwei kognitiven Systemen, die das menschliche Denken bestimmen und für zwei Arten des Denkens stehen (Kahneman, 2012). Das schnelle Denken bildet das System 1, das langsame Denken das System 2. Das erste System operiert automatisch und intuitiv, das zweite absichtlich und deliberativ. Das System 1 ist durch Impulsivität und weitgehende Mühelosigkeit, das System 2 dagegen durch Reserviertheit und Anstrengungsaufwand gekennzeichnet. Schnelles Denken ruft kognitive Verzerrungen hervor, langsames Denken vermag sie zu korrigieren. Es gilt, bewusst richtigzustellen, wozu man sich unbewusst verleiten lässt. Das schnelle Denken ist ständig aktiv und verzerrungsanfällig. Dabei kann Fehlerhaftes und Falsches auftreten. Das langsame Denken ist in der Regel passiv. Es muss in Gang

gebracht werden, um das leichtfertig und flüchtig entstandene Unzulängliche und Unvollständige zu prüfen und zu revidieren. Von Wichtigkeit ist in diesem Modell der unterschiedliche kognitive Aufwand der beiden Systeme.

Im Mittelpunkt eines sich davon absetzenden kognitionspsychologischen Modells (Stanovich und Stanovich, 2010) steht das Konzept des kritischen Denkens (*engl. critical thinking*). Hierbei haben kognitive Dispositionen einen besonderen Platz, die auf Gründlichkeit, Bedachtheit und Unverzerrtheit ausgerichtet sind (Pfister, 2020).

Einem möglichen Nutzen für die Mathematikdidaktik widmen sich die folgenden Ausführungen. Dabei findet lediglich eine Auswahl kognitiver Verzerrungen Berücksichtigung (Sjuts, 2021).

Kognitive Verzerrungen (kognitive Täuschungen bzw. kognitive Illusionen) sind Gegenstand der Kognitions- und der Sozialpsychologie. Eine kognitive Verzerrung, ein Bias, ist eine Verleitung bzw. eine Tendenz zu einem verfälschten Erinnern, Denken und Urteilen.

Kognitive Verzerrungen entstehen zumeist unwillentlich und unbewusst. In der Mathematikdidaktik ist von Präkonzepten (von Schülervorstellungen und Fehlvorstellungen) die Rede (Prediger und Wittmann, 2009). Gemeint sind damit individuelle singuläre Vorstellungen, die Ausdruck von Stadien in Lernprozessen sind und durch (vorläufige) Unrichtigkeit und Unvollständigkeit gekennzeichnet sind, bis sie sich zu regulären Vorstellungen entwickelt haben, die tragfähig und korrekt sind. Hierfür ist ein fachlich systematischer Unterricht nötig, der sich indes auf kognitive Verzerrungen und Präkonzepte einlässt und sie zum Gegenstand macht.

Drei für die Schulmathematik relevante kognitive Verzerrungen seien nachfolgend kurz umschrieben, der Bestätigungseffekt, der Verankerungs- bzw. Anpassungseffekt und der Rahmungseffekt (Sjuts, 2021).

Wenn Menschen dazu neigen, Informationen auszuwählen und aufzunehmen, die ihrer vorher gebildeten Meinung entsprechen, also Informationen so zu deuten, dass sie die eigenen Erwartungen bestätigen, spricht man von einem Bestätigungseffekt (*engl. confirmation bias*).

Orientiert man eine Entscheidung an bestimmten zumeist schon vertrauten Teilinformationen (etwa eines Textes), ohne dass einem dieser

Einfluss bewusst ist, verankert man eine Entscheidung also an Teilinformationen, auch wenn diese ganz unwesentlich sind, kommt es zu einer durchaus systematischen Verzerrung. Es liegt dann ein Verankerungs- bzw. Anpassungseffekt (*engl. anchoring bias*) vor.

Verleiten die in einem Text enthaltenen Informationen zu einer – durch eigene Vorstellungen bestimmten – Annahme, etwas für passend zu halten, ohne dass dies durch den Text gerechtfertigt ist, handelt es sich um einen auf diese Annahme bezogenen Rahmungseffekt (*engl. framing bias*). So kann der Text einer Aufgabe eine individuelle Annahme erwecken, die dazu führt, eine für geeignet erscheinende, tatsächlich aber inadäquate Rechnung anzusetzen.

Kognitive Verzerrungen treten im mathematischen Denken auf, wenn Informationen, Daten und Zahlen ungeprüft aufgenommen und verarbeitet werden, ohne die Plausibilität oder die Berechtigung dafür sichergestellt zu haben. Zu bedenken ist folglich: Schnelles Denken ist durch Umstandslosigkeit und Leichtigkeit gekennzeichnet. Es ist jedoch verzerrungsanfällig. Langsames Denken ist dagegen durch Reflexion und Anstrengung bestimmt. Es ist jedoch faul. Aber es vermag das schnelle Denken zu kontrollieren und zu korrigieren. Eine kritisch prüfende Metakognition ist folglich angezeigt.

3.3 Schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben

Wie schon erwähnt, hängen Ausübung und Nutzen von Metakognition mit dem Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe zusammen. Die Schwierigkeit, eine Aufgabe zu lösen, ist bestimmt durch inhaltsbezogene und prozessbezogene mathematische Anforderungen; zudem haben sprachlogische Komplexität und kognitive Komplexität einen wesentlichen Einfluss, was hier Berücksichtigung finden soll.

Untersuchungen zu schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen von PISA-Aufgaben haben sich vier inhalts- und aufgabenübergreifenden Merkmalen gewidmet, der sprachlogischen Komplexität, der kognitiven Komplexität, der Wissensformalisierung und der Formelhandhabung (Cohors-Fresenborg, Sjuts und Sommer, 2004). Diese vier können bereits in einer Vorabanalyse einen Aufschluss über tatsächlich auftretende Lösungshäufigkeiten vermitteln. Im Rahmen dieses Beitrags geht es um metakognitive Aktivitäten sowohl in unterstützender als auch in vorbeugender Hinsicht. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der sprachlogischen Komplexität und der kognitiven Komplexität.

Aufgabenformulierungen und Aufgabenstellungen enthalten in der Sprache liegende Schwierigkeiten, die es zu meistern gilt. Der Aufwand bei der Bewältigung einer Mathematikaufgabe hängt wesentlich vom zugehörigen Aufgabentext ab, von seiner sprachlogischen Komplexität. Das Merkmal der sprachlogischen Komplexität „erfasst Anforderungen beim Identifizieren und Verstehen von relevanten Informationen des (durch logische Struktur und sprachliche Verflechtung geprägten) Aufgabentextes, bevor diese in eine mathematische Beschreibung und Bearbeitung überführt werden“ (Cohors-Fresenborg et al., 2004, S. 114).

Die sprachliche Verflechtung kann in der Struktur der Sätze und Satzteile, in ihrer Länge, ihren Verzweigungen und ihren Rückbezügen liegen. Die Aufgabenbearbeitung kann durch eine verwirrende Reihenfolge von Informationen, aber auch durch überflüssige oder fehlende Informationen erschwert sein. Es können sprachliche Ausdrücke von spezifischer mathematischer Bedeutung auftreten. Und es können logische Beziehungen bestehen, die mehr oder weniger offensichtlich sind. Die sprachlogische Komplexität ist somit ein besonderes schwierigkeiterzeugendes Aufgabenmerkmal.

Unter der kognitiven Komplexität versteht man die Komplexität der Denkvorgänge, die bei der Bearbeitung einer Aufgabe ablaufen. Die Denkvorgänge, die zur Lösung einer Aufgabe gehören, können unterschiedlich zusammengesetzt sein. Die kognitive Komplexität kann einerseits darin liegen, dass eine größere Anzahl von Denkvorgängen nacheinander abzuarbeiten ist. Die Anforderung steigt, wenn die Ergebnisse vorhergehenden Denkens bei einem neuen Denkschritt benutzt werden müssen. Die kognitive Komplexität kann andererseits darin liegen, dass bei einem Denkschritt gleich mehrere Informationen zu verarbeiten sind.

Die kognitive Komplexität kann gering sein, wenn die nötigen Denkvorgänge auf der Hand liegen; sie kann sehr ausgeprägt sein, wenn heuristische, strategische, strukturierende und metakognitive Überlegungen die Denkvorgänge begleiten müssen, um unvertraute und unübersichtliche Situationen zu meistern, um mittels eines zunächst nicht ersichtlichen Gedankengangs von möglicherweise beziehungsreichen inneren Abhängigkeiten zu einer Lösung zu gelangen (Sjuts, 2003).

Das Merkmal der kognitiven Komplexität „erfasst Anforderungen an Ausmaß, Intensität und Vielschichtigkeit von Denkvorgängen beim Lösen einer Aufgabe; insbesondere kann die Lösung mittels gleichzeitig zu

berücksichtigender Denkschritte oder mittels gestaffelter Denkschritte in einer zu beachtenden Reihenfolge erfolgen“ (Cohors-Fresenborg et al., 2004, S. 115).

Aufgabenstellungen lassen sich hinsichtlich der jeweiligen Merkmalsausprägung von sprachlogischer Komplexität und kognitiver Komplexität stufen. Dafür liegt ein dreistufiges System vor (Cohors-Fresenborg et al., 2004). Die Stufe 0 wird zugewiesen, falls das Merkmal sehr gering ausgeprägt ist oder aufgrund der Art der Aufgabenstellung nicht vorkommt. Mit der Stufe 1 wird eine geringe Anforderung gekennzeichnet. Die Stufe 2 umfasst ein breites Ausprägungsspektrum. Gefordert wird bei der Zuweisung dieser Stufe der Regelstandard, jedoch sind auch hohe Anforderungen einbezogen. Nähere Erläuterungen zu den Zuordnungen finden sich in den Tabellen 2 und 3.

Das Merkmal der sprachlogischen Komplexität beinhaltet Anforderungen auf ...	
Stufe 0, ...	wenn die Reihenfolge der Sätze bzw. der Satzteile den Schritten der mathematischen Bearbeitung entspricht, es sich um Einwortsätze (mit Operatoren) oder um einfache Hauptsätze (ohne Nebensätze) handelt.
Stufe 1, ...	wenn die Reihenfolge der Textteile den Schritten der mathematischen Bearbeitung verdeckt oder teilweise entspricht, sprachliche Rückbezüge auftreten, eine Auswahl von Textinformationen erfolgen muss, nur einfache logische Ausdrücke vorliegen.
Stufe 2, ...	wenn die Reihenfolge der Textteile den Schritten der mathematischen Bearbeitung nicht entspricht, komplexe sprachliche Verflechtungen und Rückbezüge auftreten, logische Ausdrücke in verknüpfter Form oder nicht explizit vorliegen.

Tabelle 2: Stufen von sprachlogischer Komplexität

Das Merkmal der kognitiven Komplexität beinhaltet Anforderungen auf ...	
Stufe 0, ...	wenn wenige Denkvorgänge (nicht ineinander gesetzt, nicht parallel) ablaufen können, für die Denkkorganisation ein festes Schema benutzt werden kann, bei Modellierungen einfach zu erkennen ist, welches Modell herangezogen wird.
Stufe 1, ...	wenn Denkvorgänge nacheinander oder parallel ablaufen müssen, zusätzliche Überlegungen nötig sind und Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind, bei Modellierungen zu klären ist, welches Modell herangezogen wird.

Stufe 2, ...	wenn die Auswahl und die Abfolge von Denkvorgängen vorweg zu überlegen sind, Nebenbedingungen und Fallunterscheidungen zu berücksichtigen sind, begleitende Kontrollen anfallen, bei Modellierungen komplexe Vorüberlegungen nötig sind.
--------------	--

Tabelle 3: Stufen von kognitiver Komplexität

Diese Schwierigkeitsmerkmale sind maßgeblich, wenn man eine Analyse von Aufgaben nach den bei der Bearbeitung ablaufenden Denkprozessen durchführt. „Dabei spielt das geistig-mathematische Instrumentarium, das Instrumentarium zum (intuitiven) Erfassen und zum (zielorientierten) Bearbeiten von komplexen Text- und Aufgabeninformationen, die wesentliche Rolle“ (Cohors-Fresenborg et al., 2004, S. 111). Neben sachstrukturellen Gegebenheiten einer Aufgabe sind folglich kognitive und metakognitive Prozesse bei der Schwierigkeitsanalyse von zentraler Bedeutung.

3.4 Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen anhand eines Kategoriensystems

Für die Analyse von metakognitiver und diskursiver Unterrichtsqualität liegt ein eingehend erprobtes Kategoriensystem vor (Nowińska, 2016; 2018, Nowińska und Sjuts, 2019). Grundlage sind videographierte und transkribierte Unterrichtssequenzen (nicht nur im Fach Mathematik) und ihre umfangreichen Auswertungen.

Das Kategoriensystem besteht aus fünf Kategorien, den auf Metakognition bezogenen drei Kategorien Planung, Monitoring und Reflexion sowie den zwei weiteren Kategorien Diskursivität und negative Diskursivität. Die letzten beiden haben aufgrund folgender Überlegung Eingang in das Kategoriensystem gefunden: Verständigung im Klassengespräch und Verstehen der diskutierten Fachinhalte erfordern eine Vielzahl von Aushandlungsprozessen, in denen das Gesagte und das damit Gemeinte präzisiert werden sollen. Nicht die Anzahl von Einzelbeiträgen zählt, sondern die Kohärenz und inhaltliche Klarheit des daraus resultierenden Diskurses. Dies ist dadurch erreichbar, dass Lehrende und Lernende sich präzise auf das beziehen, was zur Diskussion steht und was dazu bereits gesagt wurde (Nowińska und Sjuts, 2019).

In Anlehnung daran ist ein Kategoriensystem zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in schriftlichen Aufgabenbearbeitungen entstanden (Schürstedt, 2021). Dabei waren Änderungen und Ergänzungen in den fünf Kategorien erforderlich. Geblieben ist die bei der prozeduralen

Metakognition übliche Dreiteilung in Vorausschau, Innehalten und Rückschau. Für Aufgaben und Aufgabenbearbeitungen lauten die dafür angepassten drei Kategorien: Planung der Aufgabenbearbeitung, Monitoring während der Aufgabenbearbeitung und Reflexion über die Aufgabenstruktur oder -bearbeitung (Tabelle 4).

In der Planungskategorie (P) gibt es nur eine Unterkategorie (P1: Planung metakognitiver Aktivitäten). Dies ist eine Konsequenz aus der Feststellung, dass Planungsüberlegungen vor der Bearbeitung einer Aufgabe im Hinblick auf beabsichtigte metakognitive Aktivitäten selten verschriftlicht werden.

Die Monitoringkategorie (M) besteht dagegen aus acht Unterkategorien. Stets handelt es sich dabei um Kontrollaktivitäten, die während der Aufgabenbearbeitung stattfinden. Sie beziehen sich auf fachspezifische Tätigkeiten (M1), auf Terminologie (M2), Notation (M3), Werkzeugeinsatz (M4) und Argumentationskonsistenz (M5), auf die Passung von Ergebnis und Fragestellung (M6), die Adäquatheit individueller Vorstellungen (M7) und die persönliche Einschätzung (M8).

In der Reflexionskategorie (R) befinden sich ebenfalls acht Unterkategorien (R1 bis R8). Sie entsprechen den Monitoringunterkategorien, allerdings mit dem Unterschied, dass hier nicht eine das Vorgehen begleitende Kontrolle stattfindet, sondern eine rückbetrachtende Überprüfung von Struktur, Vorgehensweise und Ergebnis. Die genaue Entsprechung der Unterkategorien von Monitoring und Reflexion stellt eine leichte Abänderung des Kategoriensystems zu metakognitiven und diskursiven Aktivitäten in Unterrichtsgesprächen dar.

Markant ist die Änderung in der vierten und fünften Kategorie. So lässt sich vorhandene oder fehlende Diskursivität als Kennzeichen von Unterrichtsqualität nicht unmittelbar auf Aufgabenbearbeitungen übertragen, die Idee, etwas nicht Vorhandenes, aber Bedeutsames bei Aufgabenbearbeitungen zu untersuchen, dagegen wohl. Das Kategoriensystem zu Aufgabenbearbeitungen enthält daher zwei neue Kategorien, nämlich Defizite in der Aufgabenbearbeitung aufgrund fehlender metakognitiver Aktivitäten (D) sowie fachliche oder sprachbezogene Fehler (F). Zur Kategorie der Defizite gehören sechs Unterkategorien (D1 bis D6), die sich in den Inhalten und den Nummern von 1 bis 6 auf die entsprechenden Unterkategorien von Monitoring und Reflexion beziehen. Zur Kategorie der fachlichen und sprachlichen Fehler gehören zwei Unterkategorien, die

Fehlvorstellungen (F1) und unverständliche Darstellungen (F2) betreffen.

Die Kategorie D setzt sich von den ersten drei Kategorien P, M und R dadurch ab, dass nicht die bei den Aufgabenbearbeitungen rekonstruierbaren metakognitiven Prozesse aufgeführt werden, sondern solche metakognitiven Aktivitäten, deren Fehlen zu Defiziten in den Aufgabenbearbeitungen führen. Die einzelnen Unterkategorien benennen Unzulänglichkeiten und Unkorrektheiten in der Aufgabenbearbeitung, denen mit spezifischen metakognitiven Aktivitäten – schon präventiv – entgegen gewirkt werden kann.

Liegt Fehlerhaftes und Falsches in den Aufgabenbearbeitungen vor, dem nicht mit metakognitiven Aktivitäten begegnet werden kann, kommt die Kategorie F zum Tragen. Hier handelt es sich um wesentliche Schwächen wie folgenreiche Fehlvorstellungen, fachliche Lücken und sprachliche Mängel.

Planung der Aufgabenbearbeitung	Monitoring während der Aufgabenbearbeitung	Reflexion über die Aufgabenstruktur oder -bearbeitung	Defizite in der Aufgabenbearbeitung aufgrund fehlender metakognitiver Aktivitäten
P1: Planung metakognitiver Aktivitäten	M1: Kontrolle fachspezifischer Tätigkeiten	R1: Reflexion über die Struktur einer fachspezifischen Darstellung oder die Struktur, die einer fachspezifischen Tätigkeit zugrunde liegt (Strukturanalyse, -interpretation)	D1: Inadäquate Durchführung fachspezifischer Tätigkeiten
	M2: Kontrolle der Terminologie / Wortwahl / Verwendung von Begriffen	R2: Reflexion über Terminologie / Wortwahl / Verwendung von Begriffen	D2: Inadäquate Nutzung der Terminologie / Wortwahl / Verwendung von Begriffen
	M3: Kontrolle der Notation / Darstellung	R3: Darstellung der Ergebnisse einer Reflexion in Form einer fachspezifischen Darstellung (Darstellung erstellen, wechseln, ändern)	D3: Fehlerhafter Umgang mit fachspezifischen Darstellungen
	M4: Kontrolle der Zulässigkeit oder Adäquatheit von Werkzeugeinsatz	R4: Reflexion über die Wirkungsweise / Anwendung von fachspezifischen Werkzeugen oder Methoden, insbesondere	D4: Unzulässiger Einsatz von Werkzeugen oder Methoden

	oder Methode, insbesondere in Bezug auf Planungsansatz oder Modellierungsansatz	Angabe eines Werkzeugs, mit dem ein vorgegebenes Ergebnis erzeugt werden soll (Wirkungs- und Anwendungsanalyse)	
	M5: Kontrolle der Konsistenz einer Argumentation / Äußerung	R5: Reflexion über inhaltliche oder strukturelle Aspekte einer Argumentation (Argumentationsanalyse) R5a: Angabe einer Argumentation R5b: Analyse einer vorliegenden Argumentation	D5: Lückenhafte oder inkonsistente Argumentation
	M6: Kontrolle der Passung von Ergebnis und Fragestellung	R6: Reflexion der Intention der Fragestellung	D6: Mangelnde Passung von Fragestellung und Ergebnis
	M7: Kontrolle der Adäquatheit individueller Vorstellungen	R7: Reflexion über die Wechselwirkung von Darstellung und Vorstellung	Fachliche oder sprachbezogene Fehler
	M8: Kontrolle der persönlichen Einschätzung	R8: Reflektierende Einschätzung / Evaluation	F1: Fehlvorstellung / fachlicher Fehler
			F2: Unverständliche Darstellung aufgrund sprachlicher Fehler

Tabelle 4: Kategoriensystem (im Original mehrfarbig, hier schwarz-weiß) zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen

Mithilfe des Kategoriensystems lassen sich metakognitive Aktivitäten bei Aufgabenbearbeitungen rekonstruieren und somit genauer analysieren. Deutlich wird dadurch ebenso der Nutzen bestimmbarer metakognitiver Aktivitäten, die einerseits eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung absichern und andererseits kognitiven Verzerrungen entgegenwirken können.

3.5 Analyse der Intensität metakognitiver Aktivitäten anhand eines Einstufungssystem

Metakognitive Aktivitäten sind unterschiedlich ausgeprägt. Unter der begründeten Annahme (Van der Stel et al., 2009), dass damit eine unterschiedliche Wirksamkeit verbunden ist, erhält die Analyse von Art und

Weise der Unterschiede eine überaus hohe Relevanz. Nach der Rekonstruktion von metakognitiven Aktivitäten in Aufgabenbearbeitungen ist es also konsequent, eine systematische Einschätzung der Intensität von metakognitiven Aktivitäten in Aufgabenbearbeitungen vorzunehmen. Mittels einer ähnlichen Entwicklung und Erprobung wie beim Kategoriensystem zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen (Schürstedt, 2021) ist so das Einstufungssystem zur Intensität metakognitiver Aktivitäten bei Aufgabenbearbeitungen (Hiegeist, 2022) entstanden. Bei beiden Systemen wurde nach der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) vorgegangen.

Das System zur Einschätzung der Intensität ist dreistufig, es besteht aus der Stufe 0, der Stufe 1 und der Stufe 2. Zur Stufe 0 gehört eine Ausprägung metakognitiver Aktivitäten in nicht bis so gut wie nicht erkennbarer Form. Eine geringfügig vorhandene Ausprägung metakognitiver Aktivitäten kennzeichnet die Stufe 1. Metakognitive Aktivitäten mit nennenswerter oder wesentlicher, aber auch hochgradiger Ausprägung liegen auf der Stufe 2.

Als Anleitung für die Einschätzung dient das Einstufungssystem zur Intensität rekonstruierter metakognitiver Aktivitäten in schriftlichen Aufgabenbearbeitungen (Tabelle 5).

Grundlegend für die Anleitung sind folgende Indikatoren (Hiegeist 2022):

- *Grad und Qualität von Erläuterungen und Begründungen:* Ausführliche und elaborierte Erläuterungen und Begründungen sind Ausdruck einer intensiven Durchdringung des Problemgehalts der Aufgabe und einer intensiven Kontrolle und Reflexion des eigenen Denkens.
- *Denken als Gegenstand der Verschriftlichung:* Wird (eigenes) Denken in der Darstellung expliziert, spricht dies für eine intensive metakognitive Auseinandersetzung mit (eigenen) Denkvorgängen.
- *Unterstützung der korrekten Lösungsfindung:* Unterstützen metakognitive Kontroll- und Reflexionsaktivitäten korrekte Lösungswege, Ergebnisse oder deren Ansätze, können sie als intensiv durchdachte Aktivitäten gelten.
- *Erkennbarkeit von metakognitiven Strategien:* Das Auftreten metakognitiver Strategien ist ein Zeichen für eine intensive Nutzung metakognitiver Aktivitäten.

▪ *Auftreten von Defiziten aufgrund fehlender metakognitiver Aktivitäten:* Defizite zeigen, dass metakognitive Aktivitäten zu ihrer Verhinderung oder Verminderung nicht oder kaum erfolgt sind, was als geringe Intensität angesehen werden kann.

	Unterkategorie	Intensität		
		Stufe 0	Stufe 1	Stufe 2
P	P1: Planung metakognitiver Aktivitäten	Es gibt keine oder nur nicht nachvollziehbare Überlegungen zur Planung.	Einzelne Planungsteile sind erkennbar, sie werden nur teilweise umgesetzt oder sie sind unklar.	Es sind explizite Überlegungen angegeben, die die Bearbeitung strukturieren.
M	...			
	M3: Kontrolle der Notation / Darstellung	Es ist keine direkte Kontrolle von Darstellungen erkennbar.	Es werden Darstellungen als Hilfsmittel von Kontrollen erstellt.	Es liegt eine begründete Kontrolle von Darstellungen (samt Wechsel) vor.
	M4: Kontrolle der Zulässigkeit oder Adäquatheit von Werkzeugeinsatz oder Methode, insbesondere in Bezug auf Planungsansatz oder Modellierungsansatz	Es ist keine Kontrolle von Methoden und Werkzeugen erkennbar.	Eine Kontrollnotwendigkeit wird festgestellt.	Es liegt eine begründete Kontrolle von Methoden und Werkzeugen samt Korrektur vor.
	M5: Kontrolle der Konsistenz einer Argumentation / Äußerung	Es ist keine Kontrolle von Argumenten erkennbar.	Es werden einzelne Teile einer Argumentation kontrolliert.	Die Argumentation wird kontrolliert und erläutert.
	...			
R	R1: Reflexion über die Struktur einer fachspezifischen Darstellung oder die Struktur, die einer fachspezifischen Tätigkeit zugrunde liegt	Strukturen werden nicht reflektiert oder nur beschreibend (ohne Bezug zum eigenen Denken) wiedergegeben.	Es werden Teile der Aufgabe analysiert, die Erläuterungen bleiben auf einer niedrigen	Die Aufgabe wird detailliert analysiert und erläutert, ein korrekter Lösungsweg dargestellt.

	(Strukturanalyse, -interpretation)		inhaltlichen Ebene.	
	R2: Reflexion über Terminologie / Wortwahl / Verwendung von Begriffen	Begriffe und Konzepte werden nicht erkennbar reflektiert oder inkorrekt verwendet.	Begriffe und Konzepte werden ohne Verweis auf eine Definition korrekt benutzt.	Begriffe und Konzepte werden korrekt wiedergegeben, sie unterstützen die Lösungsfindung.
	...			

Tabelle 5: Einstufungssystem (auszugsweise) zur Intensität metakognitiver Aktivitäten in Aufgabenbearbeitungen

4. Erhebungen und Analysen

Die im Rahmen dieses Beitrags verwerteten empirischen Studien dienen einer tiefergehenden Beschäftigung mit Metakognition, und zwar im Hinblick erstens auf eine spezifische Analyse von Metakognition innerhalb von Aufgaben und schriftlichen Aufgabenbearbeitungen in Mathematik, zweitens auf eine Erweiterung beruflicher Handlungsoptionen zur Gestaltung von Metakognition auslösenden Aufgaben und drittens auf einen Erkenntniszuwachs zur Wirksamkeit von Metakognition in mathematischen Denkprozessen.

Dabei sind folgende Einzelfragen von Bedeutung:

Ermöglicht das entwickelte Kategoriensystem eine Beschreibung metakognitiver Aktivitäten bei schriftlichen Aufgabenbearbeitungen? Ist es geeignet, metakognitive Prozesse in Aufgabenbearbeitungen systematisch zu erfassen?

Gilt das in entsprechender Weise auch für das Einstufungssystem zur Intensität metakognitiver Aktivitäten?

Lassen sich Hinweise gewinnen zur Anlage, Durchführung und Auswertung des Einsatzes von Metakognition auslösenden Aufgaben?

Lassen sich aus der Analyse von Aufgabenbearbeitungen Folgerungen für einen differenzierten Umgang mit Fehlerhaftem und Falschem ziehen?

Unter welchen Bedingungen können metakognitive Aktivitäten wirksam werden?

In welcher Weise kann das in den Erhebungen zum Tragen gekommene Instrumentarium einen nutzbringenden Beitrag zur Lehramtsausbildung leisten?

Passende Aufgaben bilden gewissermaßen die Versuchsanordnung dieser zweiteiligen empirischen Untersuchung. Die Art der Aufgaben ist ebenso von Bedeutung wie ihr Schwierigkeitsprofil. In ihnen sollen zudem mögliche kognitive Verzerrungen angelegt sein, die bei der Bearbeitung mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auftreten. Zentral ist, dass die Aufgaben metakognitive Prozesse hervorrufen, die in den schriftlichen Bearbeitungen zumindest mittelbar zum Ausdruck kommen.

Die danach durchzuführende Analyse richtet sich darauf, die metakognitiven Aktivitäten anhand eines Kategoriensystems zu rekonstruieren und ihre Intensität mittels eines Einstufungssystems zu bewerten. Damit unterziehen sich die beiden Systeme auch einer Bewährung im Sinne einer strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015).

4.1 Vorgehen bei der empirischen Untersuchung

Wichtig für das Untersuchungsarrangement sind also in besonderem Maße die einzusetzenden Aufgaben mit ihrem aktivierenden und diagnostischen Charakter. Sie müssen herausfordernd und motivierend sein. Sie sind daher so zu gestalten, dass sie zu einer intensiven Auseinandersetzung anregen und eine ausführliche Verschriftlichung des Lösungsgangs erwirken. Denn auf diese Weise lassen sich individuelle Vorstellungen und kognitive Verzerrungen sowie kognitive wie metakognitive Prozesse nach außen kehren.

Übliche Aufgaben erfüllen diese Anforderungen nicht unbedingt. Die Umgestaltung und Erweiterung hat somit dafür zu sorgen, dass die Aktivitäten des Explizierens, Variierens, Formalisierens, Analysierens und Synthetisierens sich sichtbar oder zumindest latent niederschlagen.

Zu berücksichtigen ist weiterhin, dass die eingesetzten Aufgaben schulcurricular verortet sind und innerhalb der in den Bildungsstandards für Mathematik festgelegten Leitideen und Kompetenzen liegen. Die in diesem Beitrag dargelegten Studien betreffen die Schuljahrgänge 7 bis 9. Zwei oder drei Aufgaben pro Testperson stellen ein sinnvolles Maß für die Bearbeitung in höchstens einer Unterrichtsstunde dar.

Jede Aufgabe wird zunächst einer Vorab einschätzung ihres Potenzials unterzogen. Das betrifft die Art der Aufgabenstellung und der Aufgabenerweiterung, die Schwierigkeitseinstufung von sprachlogischer und kognitiver Komplexität sowie die in der Aufgabe angelegten kognitiven Verzerrungen.

Hinsichtlich metakognitiver Aktivitäten ist auch hier zu bedenken: Sie können nicht nur von unterstützender Art sein, sondern auch vermeiden helfen, dass kognitive Verzerrungen oder Nachlässigkeiten, Flüchtigkeiten, Oberflächlichkeiten und Unüberlegtheiten zu einer fehlerhaften Aufgabebearbeitung führen. Daher ist vorab zu überlegen, welche metakognitiven Aktivitäten kontrollierend wirken können, welche zweckdienlich in unterstützender oder vorbeugender Hinsicht sind.

Erst daraufhin erfolgt die Einschätzung der in einer angefertigten Aufgabebearbeitung rekonstruierbaren metakognitiven Aktivitäten. Es ist sinnvoll, zunächst zu ermitteln, welche kognitiven Verzerrungen vorliegen. Und dann ist zu untersuchen, inwiefern vorhandene oder fehlende metakognitive Aktivitäten mit den kognitiven Verzerrungen in Verbindung gebracht werden können.

In einer genauen Rekonstruktion erfolgt danach die Kategorisierung der metakognitiven Aktivitäten. Hier kommt das Kategoriensystem zur Anwendung. Die rekonstruierten metakognitiven Aktivitäten werden in den Verschriftlichungen farbig markiert und mit einem Code, der Kurzform der metakognitiven Aktivitäten, versehen (Mayring, 2015). So erhält man eine akzentuierte Darstellung der metakognitiven Prozesse.

Es folgt die Betrachtung der jeweiligen Intensität. Hier ist zu beachten, dass alle im Erwartungshorizont aufgeführten und ebenso alle zusätzlich in einer Bearbeitung aufgetretenen metakognitiven Aktivitäten eingestuft werden.

Abschließend wird in einem jeweiligen Kurzfazit der Einfluss der Intensitäten auf den Lösungserfolg bilanziert.

Einen Einblick in das beschriebene Vorgehen können die im Anhang befindlichen Aufgaben und Aufgabebearbeitungen geben. Die Auswahl beschränkt sich indes auf beispielhafte Analysen.

4.2 Umfang und Art der zweiteiligen Untersuchung

Eine Zusammenstellung von Aufgaben und Aufgabenerweiterungen hat bereits vor der hier dargelegten zweiteiligen Untersuchung (Schürstedt, 2021, Hiegeist, 2022) bestanden. Aus einer umfangreichen Sammlung sind Aufgaben mit und ohne Erweiterung schon in verschiedenen Analysen (Sjuts, 2018; 2019; 2021) zur Darstellung gekommen. Die Umgestaltung bzw. Erweiterung sowie die Überarbeitung waren Gegenstand mehrerer Erprobungen, die Lehramtsstudierende im Rahmen von Lehrveranstaltungen als sogenannte Praxisforschung (Sjuts, 2005, Fischer, Niesel und Sjuts, 2012) durchgeführt haben. Auf diese Weise konnte die Eignung der Aufgaben hinsichtlich der curricularen Einordnung, der Formulierung der Aufgabenstellung, des Anspruchsniveaus und des Zeitaufwands für die Bearbeitung sichergestellt werden.

An der zweiteiligen Untersuchung haben insgesamt 424 Schülerinnen und Schüler aus 21 Lerngruppen der Schuljahrgänge 7 bis 9 verschiedener Schulen teilgenommen. Teils sind drei Aufgaben, teils zwei Aufgaben pro Person zu bearbeiten gewesen, die Summe aller Aufgabenbearbeitungen beträgt 951. Nach einer ersten vollständigen Sichtung sind insgesamt 65 Aufgabenbearbeitungen für die ausführliche Analyse ausgewählt worden. Dies wurde für eine derartige Untersuchung als angemessen eingeschätzt.

Hierzu sind einige Anmerkungen erforderlich. Die *Entwicklung* des Kategoriensystems zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen orientierte sich stark an der Struktur des Kategoriensystems zur Analyse von metakognitiver und diskursiver Unterrichtsqualität (Nowińska, 2016). Eine Änderung der Kategorien zur Diskursivität war nötig, da es sich bei schriftlichen Aufgabenbearbeitungen nicht um mündliche Lehr-Lern-Prozesse handelt. Die neuen Kategorien der Defizite in der Aufgabenbearbeitung aufgrund fehlender metakognitiver Aktivitäten sowie der fachlichen oder sprachbezogenen Fehler entstanden jedoch in einer strukturähnlichen Unterkategorienübernahme. Das Ergebnis dieser Übernahme einschließlich geringfügiger Modifikation kam in einem intensiven Diskurs innerhalb der Arbeitsgruppe zustande. Die Strukturierungsdimensionen – im ersten Teil der Untersuchung noch ohne Berücksichtigung ihrer Intensitätsausprägungen – bilden in der Zusammenstellung das Kategoriensystem zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen. Die *Erprobung* dieses Systems ist insofern als deduktive Kategorienanwendung (Mayring, 2015) anzusehen.

Die *Entwicklung* des Einstufungssystems zur Intensität metakognitiver Aktivitäten in Aufgabenbearbeitungen umfasste die Übernahme der Kategorien und die Erweiterung ihrer Dimensionen um eine Differenzierung ihrer Intensitäten (Mayring, 2015). Die Merkmalsbeschreibungen für die jeweiligen Stufen sind mithilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) in induktiver Weise entwickelt worden. Die Zusammenstellung zu einem Einstufungssystem erfolgte wiederum mittels eines eingehenden diskursiven Verfahrens in der Arbeitsgruppe. Ein wesentlicher Unterschied zum Kategoriensystem besteht darin, dass im Einstufungssystem für alle Eintragungen eine quantitative Komponente hinzukommt. Die *Erprobung* des Einstufungssystems ist in der Art der des Kategoriensystems vergleichbar.

Dennoch sind die Erprobungen der beiden Systeme nicht schlichte Abarbeitungen von Kodierungen. Das liegt zum einen daran, dass es sich bei den Gegenständen der Betrachtung um Textbestandteile aus den Verschriftlichungen der Aufgabenbearbeitungen handelt. Dabei gilt es zu prüfen, ob die jeweilige Kategorie bzw. Unterkategorie überhaupt in Frage kommt und ob ihre Beschreibung eine verlässliche Zuordnung erlaubt. Zum anderen sei daran erinnert, dass der jeweiligen Kodierung stets eine mehrteilige Analyse vorausgeht. Zu ihr gehört es, die Gestaltungsart und den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe festzustellen sowie die in der Aufgabe angelegten kognitiven Verzerrungen sowie die zur Aufgabenbearbeitung zweckmäßigen metakognitiven Aktivitäten zu ermitteln. Erst dann, also unter Berücksichtigung dieser Erkenntnisse, werden die einzelnen Textpassagen der Aufgabenbearbeitungen in den Blick genommen und hinsichtlich der Kategorien und der Intensitätsstufen kodiert.

4.3 Ergebnisse

Die in der Analyse betrachteten 65 Aufgabenbearbeitungen sind eine Auswahl. Das vorrangige Kriterium, sie zu nehmen, besteht darin, in ihnen metakognitive Aktivitäten vorzufinden. Diese auszuzählen, liefert indes keine Auskünfte über das Vorkommen metakognitiver Aktivitäten insgesamt. Gleichwohl ist die innere Verteilung bei der Auswahl aufschlussreich (Tabelle 6).

Stets unter der Prämisse, dass die Auswahl der Aufgabenbearbeitungen nicht die Gesamtheit widerspiegelt, ist doch einiges bemerkenswert. Pro

Aufgabenbearbeitung lassen sich im Durchschnitt drei bis vier metakognitive Aktivitäten ausmachen, es treten durchschnittlich aber auch ein bis zwei Defizite aufgrund fehlender metakognitiver Aktivitäten auf.

Die geringe Anzahl von Planungsaktivitäten ist erwartungsgemäß. Auffällig ist dagegen die geringe Zahl an Monitoringaktivitäten gegenüber der deutlich größeren Zahl an Reflexionsaktivitäten. Eine begleitende Kontrolle wird offenbar seltener verschriftlicht als eine nachträgliche Überprüfung oder eine von höherer Ebene aus.

Planung	Monitoring	Reflexion	Summe	Defizite
P1: 13	M1: 11	R1: 48	72	D1: 16
	M2: 1	R2: 20	21	D2: 12
	M3: 1	R3: 24	25	D3: 14
	M4: 5	R4: 32	37	D4: 4
	M5: 4	R5: 34	38	D5: 32
	M6: 3	R6: 1	4	D6: 30
	M7: 4	R7: 0	4	
	M8: 9	R8: 12	21	
P: 13	M: 38	R: 171	222	D: 108

Tabelle 6: Anzahl der kodierten metakognitiven Aktivitäten und der Defizite

Hinsichtlich der Summe metakognitiver Tätigkeiten mit gleichem Bezug gibt es ein zahlenmäßiges Gefälle. Am häufigsten werden die Aufgabenstruktur (R1) und die fachspezifische Tätigkeit (M1, R1) schriftlich kommentiert. Es folgen die Argumentation (M5, R5) und der Werkzeugeinsatz (M4, R4). Die Darstellung (M3, R3) und die Begrifflichkeit (M2, R2) werden vergleichsweise wenig kontrolliert und überprüft, obwohl sie unmittelbar sichtbar und erfassbar sind. In ähnlicher Anzahl ist eine persönliche Evaluation (M8, R8) festzustellen. Am wenigsten sind die Wechselbeziehung von Vorstellungen und Darstellungen (M7, R7) sowie der Abgleich von Aufgabenstellung und Ergebnis (M6, R6) Gegenstand der Verschriftlichung.

Defizite treten in nennenswerter Anzahl hinsichtlich Argumentation (D5) und Ergebnis (D6) auf. Während die Argumentation einer Kontrolle

(M5) und Reflexion (R5) unterzogen wird, geschieht dies für das Ergebnis der Aufgabe in Abgleich mit der Fragestellung (R6) fast gar nicht.

Aus der Erprobung des Einstufungssystems zur Intensität metakognitiver Aktivitäten in der zweiten Teiluntersuchung liegen folgende Ergebnisse vor: Von den insgesamt 96 kodierten metakognitiven Aktivitäten sind 24 der Stufe 0, 37 der Stufe 1 und 42 der Stufe 2 zugeordnet worden. Ohne auf weitere Details einzugehen, sei hier erwähnt, dass bei den festgestellten metakognitiven Aktivitäten diese nicht in der Intensität stattgefunden haben, die für die Lösung der bearbeiteten Aufgabe samt Sicherstellung des Ergebnisses nötig gewesen wäre.

Berichtenswert ist ein weiterer Befund: Im Rahmen der empirischen Erhebung erhielten die in den beteiligten Lerngruppen unterrichtenden Lehrkräfte einen Fragebogen. Darin wurde erfragt, inwieweit Lehrperson und Lerngruppe mit dem Begriff Metakognition und mit metakognitiven Strategien vertraut waren und inwieweit metakognitive Aktivitäten im Unterricht und bei der Bearbeitung von Aufgaben Berücksichtigung fanden. Bei 11 (von insgesamt 19) Lehrkräften war das ihren Angaben zufolge zumindest ansatzweise der Fall. Hier ließ sich beobachten, dass ihre Schülerinnen und Schüler in den untersuchten Aufgabenbearbeitungen vermehrt und manchmal sogar intensive metakognitive Aktivitäten zeigten.

5. Fazit

Die abschließende Betrachtung geht auf die grundlegenden Fragen ein, nämlich die, wie eine passende Gestaltung von Aufgaben in Mathematik es in einem zunehmenden Maße ermöglicht, metakognitive Aktivitäten auszulösen, wie man diese in Aufgabenbearbeitungen anhand geeigneter Einordnungssysteme ausfindig zu machen und zu kategorisieren vermag und wie sich metakognitive Aktivitäten auf die Lösung von Aufgaben auswirken können. Ebenso kommen die auf die Einzelfragen gefundenen Antworten zur Sprache.

5.1 Kategorien und Intensitätsstufen metakognitiver Aktivitäten

Hinsichtlich der Gestaltungsart von Aufgaben und ihres jeweiligen Schwierigkeitsgrads konnte auf Vorarbeiten zurückgegriffen werden.

Den Schwerpunkt der vorliegenden Ausführungen bilden ein Kategoriensystem zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen und ein Einstufungssystem zur Intensität metakognitiver Aktivitäten in Aufgabenbearbeitungen. Der innere Aufbau der beiden Systeme folgt dem allgemeinen Konzept von Metakognition samt Komponentengefüge sowie einer weiteren mathematikspezifischen Ausdifferenzierung. Hervorzuheben ist allerdings eine wesentliche Ergänzung, die darin besteht, auch Defizite in einer Aufgabenbearbeitung aufgrund fehlender Metakognition auszuweisen. Es geht dabei um solche metakognitiven Aktivitäten, die der Prävention von Unzulänglichkeiten und Verzerrungen in der Aufgabenbearbeitung dienen können. Im Sinne von Tun und Lassen tritt also metakognitives Tun in den Kategorien von Planung, Monitoring und Reflexion auf und metakognitives Lassen in der Kategorie von Defiziten, denen es entgegenzuwirken gegolten hätte.

Während die Entwicklung der Einordnungssysteme hinsichtlich der Beschreibung der verschiedenen Unterdimensionen sich als diskursiv kennzeichnen lässt, kann die Erprobung als deduktive Kategorienanwendung angesehen werden. Insbesondere aufgrund der in den jeweiligen Verfahren angestellten komplexen Gesamtüberlegungen haben sowohl das Kategoriensystem zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen als auch das Einstufungssystem zur Intensität metakognitiver Aktivitäten in Aufgabenbearbeitungen ihre Eignungsprobe bestanden.

Die Verlässlichkeit der Umschreibungen zur Rekonstruktion kognitiver Verzerrungen war nicht Untersuchungsgegenstand. Es bleibt noch offen, ob eine genauere Beschreibung einer kognitiven Verzerrung erforderlich ist und ob erst ein gründlicherer Einblick in das individuelle Denken (etwa durch Verschriftlichung des Vorgehens bei der Aufgabenbearbeitung oder durch lautes Denken) eine verlässliche Zuordnung ermöglicht.

Eine Quantifizierung des Einflusses von Metakognition auf den Erfolg bei einer Aufgabenbearbeitung war ebenfalls nicht Untersuchungsgegenstand. Gleichwohl lassen sich Feststellungen treffen, die auch frühere Darlegungen untermauern. Es kommt sehr auf die Gestaltung einer Aufgabe an, ob metakognitive Aktivitäten angeregt und verschriftlicht werden (Kaune, 2001; 2006). Und es hängt offensichtlich von den Lehrpersonen und ihrer Vertrautheit mit Metakognition und ihrer Kenntnis über metakognitive Strategien ab, ob sie Metakognition als Bestandteil von

Lehr-Lern-Prozessen zur Geltung bringen und eine Übunglichkeit zur Verschriftlichung des Denkens etablieren.

Bei der Betrachtung der Intensität metakognitiver Aktivitäten im Zusammenhang mit der Aufgabenschwierigkeit ist besonders bei mittelschweren Aufgaben eine intensivere metakognitive Begleitung erkennbar gewesen.

Analysiert man eine einzelne Aufgabe und eine individuelle Bearbeitung, so lässt sich ein Zusammenhang von Intensität metakognitiver Aktivitäten und Lösungserfolg erkennen. Ein Rückschluss von der Intensität der metakognitiven Prozesse bei der einen Aufgabebearbeitung auf allgemeine Aussagen über die metakognitive Kompetenz der entsprechenden Person ist jedoch nicht möglich.

Zur Bilanz gehört, dass sich metakognitive Aktivitäten mittels des Kategoriensystems strukturiert erfassen und beschreiben und mittels des Einstufungssystems nach ihrer Intensität bewerten lassen.

5.2 Metakognition durch Aufgaben und Aufgabebearbeitungen

Resümieren lässt sich weiterhin die Wichtigkeit der zweck- und zielgerichteten Ausgestaltung von Aufgaben. Die Anforderung, Aufgabebearbeitungen zu verschriftlichen, ist geeignet, metakognitive Aktivitäten auszulösen. Bei der Klärung der Frage, unter welchen Bedingungen metakognitive Aktivitäten wirksam werden können, kommt der elaborierten Verschriftlichung eine maßgebliche Bedeutung zu. Eine explizite Darlegung des eigenen Denkens ermöglicht es, unmittelbare Folgerungen für Veränderungen und Verbesserungen zu ziehen.

Impulse für das Lehren und Lernen ergeben sich aus der Auseinandersetzung mit kognitiven Verzerrungen. Die Studien zeigen, dass die Aufmerksamkeit für kognitive Verzerrungen metakognitive Aktivitäten bewirken kann. Die gilt sowohl für proaktive präventive als auch für reaktive korrigierende Maßnahmen.

Wird deutlich, dass metakognitive Aktivitäten hilfreich und aussichtsreich sind, erhöht sich die Bereitschaft bei Lernenden, sie zu betreiben und auszubauen, und bei Lehrenden, sie zu vermitteln und zu etablieren.

Von Belang ist die Ausdifferenzierung dessen, was als unzureichend, was als fehlerhaft, was als falsch bezeichnet wird. Die Kategorien der beiden Einordnungssysteme benennen Unzulänglichkeiten verschiedener Art

und Weise und darauf bezogene metakognitive Aktivitäten, mit denen ihnen begegnet werden kann.

Auf dieser Basis lassen sich gezielte förderdiagnostische Ansätze und Maßnahmen entwickeln. Die differenzierte Analyse möglicher bzw. tatsächlicher Defizite legt nahe, darauf bezogene Vorkehrungen zu treffen bzw. angepasste Behebungen zu veranlassen.

5.3 Professionalisierung für ein Handeln nach wissenschaftlichen Erkenntnissen

Nicht zuletzt zeigen die Vorgehensweisen bei der Anfertigung einer Qualifikationsarbeit ein bedeutsames Professionalisierungspotenzial. Erhebungen zu metakognitiven Aktivitäten von Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben erweitern nicht nur das Blickfeld angehender Lehrkräfte (mit unerwarteten Beobachtungen), sie bilden vor allem eine Möglichkeit, wissenschaftliches Arbeiten mit dem Aufbau beruflicher Qualifikationen zu verbinden. Die vertiefte Beschäftigung mit Metakognition in Gestalt forschenden Lernens kann zur Entwicklung der Kompetenz „Diagnose und Förderung individueller Lernprozesse“ (KMK, 2004) maßgeblich beitragen.

Das Berufskonzept von Lehrkräften verlangt eine ständige Aufrechterhaltung und Erweiterung des beruflichen Wissens und Könnens. Entsprechend fordern die Standards für die Lehrerbildung ein Handeln „nach wissenschaftlichen Erkenntnissen“ (KMK, 2004). Grundlegendes Merkmal der Professionalisierung für den Schuldienst ist die Ausrichtung auf tätigkeitsfeldbezogene Wissenschaft und Forschung (Sjuts, 2022).

Gelegenheiten zur persönlichen beruflichen Entwicklung sind dann so zu gestalten, dass sie theoriegeleitetes Perzipieren, Analysieren und Strukturieren mit Ausrichtung auf berufliche Verwertung ermöglichen. Als Gegenstand eignen sich Lern- und Unterrichtssituationen sowie Lernvorgänge und -ergebnisse, die in einem forschenden Lernen erfasst und bearbeitet werden.

Die dargelegten Untersuchungen zu Aufgaben und Aufgabenbearbeitungen zeigen auf, wie forschendes Lernen während des Studiums gelingen (und ebenso für den Vorbereitungsdienst und die Weiterbildung im Beruf in Frage kommen) kann. Dabei ist der Qualifizierungsprozess weitreichend. Die Berufsforschung kennzeichnet die professionelle Lehrkraft

als aktive, sich durchweg verantwortlich fühlende Person, die das eigene Tun genau beobachtet und kontrolliert und die Schülerinnen und Schüler in substanzielles Lernen hineinbringt und ihnen ständig Einsicht in den Stand ihres Lernens ermöglicht (Hattie, 2008). Die kontinuierliche Überwachung der Wirksamkeit des eigenen Tuns ist Schlüsselbedingung für Erfolg.

Voraussetzung für ein solches berufliches Handeln ist ein wissenschaftsbasiertes Knowhow, das im vorliegenden Fall aus einem Repertoire zur Gestaltung von Aufgaben und zur Auswertung von Aufgabebearbeitungen besteht und einen Nutzen für förderdiagnostische Maßnahmen erwarten lässt.

In einem weitergehenden Sinn lassen sich überdies Anregungen sowohl für wissenschaftliche Forschungsfelder als auch für schulische Handlungsfelder formulieren.

5.4 Wissenschaftliche Forschungsfelder

Nach der Erprobung kann das strukturierte und systematische Instrumentarium Anwendung finden, um weitere Erkenntnisse über Metakognition in Mathematik zu gewinnen. Einige Untersuchungsvorhaben für die mathematikdidaktische Forschung liegen auf der Hand. Das wissenschaftliche Interesse kann sich etwa richten auf

- das Herausarbeiten von Zusammenhängen zwischen Aufgabenerweiterungen und den induzierten metakognitiven Prozessen,
- die Quantifizierung des Einflusses von Art und Intensität metakognitiver Aktivitäten auf die Lernwirksamkeit,
- die Erfassung des diagnostischen Potenzials durch Verschriftlichung nach außen gekehrter metakognitiver Prozesse,
- den kombinierten Einsatz der Methoden der Verschriftlichung und des lauten Denkens bei der Untersuchung von Metakognition,
- die Konstruktion von Items im Hinblick auf die Verwendung in Vergleichsarbeiten und Schulleistungsstudien sowie
- die Übertragung der Vorgehensweisen auf andere fachdidaktische und pädagogische Fragestellungen.

5.5 Berufliche Handlungsfelder

Eine erhöhte Aufmerksamkeit verdient Metakognition auch in Schule und Unterricht. So liegen aus den positiven Effekten von Metakognition abgeleitete Empfehlungen für ein evidenzbasiertes berufliches Handeln durchaus nahe. Von besonderem Belang sind dabei die Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen (mit Medien und Werkzeugen) und die Anlage der Nachweise von Lernergebnissen. Zu all dem gehört es,

- metakognitiv ausgerichtete Arbeits- und Sozialformen in der Unterrichtsmethodik vermehrt zu berücksichtigen,
- metakognitive Anforderungen in Aufgaben explizit zu verlangen,
- metakognitiv geprägte Aufgaben in Klassen-, Kurs- und Abschlussarbeiten aufzunehmen und
- metakognitiv begleitetes Handeln als Bildungsziel, das Fach- und Lebensbereiche umfassend betrifft, curricular zu verankern.

Die Berichterstattung soll nicht enden ohne eine Anmerkung. Metakognition zielt darauf, sich selbst zu verbessern. Aber zur Selbstoptimierung gehört die Selbstkritik, die Distanz zu sich selbst und der Diskurs mit sich selbst.

Für die unterstützungsvolle Zusammenarbeit und ihre analytische Gründlichkeit sei Edyta Nowińska aus der Arbeitsgruppe Kognitive Mathematik am Institut für Mathematik der Universität Osnabrück sehr herzlich gedankt. Ein ausdrücklicher und besonderer Dank gilt Carla Schürstedt und Carina Hiegeist für die Entwicklung und Erprobung des Kategorien- und des Einstufungssystems und Elena Kok für die Hilfe bei der Literaturrecherche.

Literaturverzeichnis

Aebli, H., Ruthemann, U., Staub, F. (1986). Sind Regeln des Problemlösens lehrbar? In: *Zeitschrift für Pädagogik* 32 (5) (617-638). Weinheim: Beltz.

Artelt, C. (2000). *Strategisches Lernen*. Münster: Waxmann.

Artelt, C. & Moschner, B. (Hrsg.) (2005). *Lernstrategien und Metakognition. Implikationen für Forschung und Praxis*. Münster: Waxmann.

- Boekaerts, M. (1996). Teaching Students Self-Regulated Learning: A Major Success in Applied Research. In: J. Georgas et al. (Eds.). *Contemporary Psychology in Europe* (245-259). Seattle: Hogrefe & Huber.
- Boekarts, M. (1999). Self-Regulated Learning: Where we are today. In: *International Journal of Educational Research* 31 (445-457). Pergamon.
- Brown, A. L. (1984). Metakognition, Handlungskontrolle, Selbststeuerung und andere, noch geheimnisvollere Mechanismen. In: F. E. Weinert, & R. H. Kluwe, (Hrsg.). *Metakognition, Motivation und Lernen* (60-109). Stuttgart: Kohlhammer.
- Christmann, U. & Groeben, N. (1999). Psychologie des Lesens. In: B. Franzmann et al. (Hrsg.). *Handbuch Lesen* (145-223). München: Saur.
- Cohors-Fresenborg, E. (2012). Metakognitive und diskursive Aktivitäten – ein intellektueller Kern im Unterricht der Mathematik und anderer geisteswissenschaftlicher Fächer. In: H. Bayrhuber et al. (Hrsg.). *Formate Fachdidaktischer Forschung, Empirische Projekte – historische Analysen – theoretische Grundlegungen* (145-162). Münster: Waxmann.
- Cohors-Fresenborg, E., Sommer, N., Sjuts, J. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: M. Neubrand (Hrsg.). *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (109-144). Wiesbaden: VS Verlag.
- Cohors-Fresenborg, E., Kramer, S., Pundsack, F., Sjuts, J., Sommer, N. (2010). The Role of Metacognitive Monitoring in Explaining Differences in Mathematics Achievement. In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 42 (2) (231–244). DOI 10.1007/s11858-010-0237-x.
- Dehaene, S. (2014). *Denken: Wie das Gehirn Bewusstsein schafft*. München: Knaus-Verlag.
- De Corte, E., Verschaffel, L., Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation: A Characteristic and a Goal of Mathematics Education. In: P. R. Pintrich, M. Boekaerts, M. Zeidner (Eds.). *Self-regulation: Theory, Research, and Applications* (687-726). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Einsiedler, W. (1996). Wissensstrukturierung im Unterricht. Neuere Forschung zur Wissensrepräsentation und ihre Anwendung im Unterricht. In: *Zeitschrift für Pädagogik* 42 (2) (167-192). Weinheim: Beltz.

- Fischer, A. (2007). Gegenseitige Beeinflussungen von Darstellungen und Vorstellungen zum Vektorraumbegriff. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 28 (3/4) (311-330).
- Fischer, A., Niesel, V., Sjuts, J. (2012). OLAW: Lehrerausbildung im Verbund – Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz im Unterricht und in Lehr-Lern-Laboren. In: C. Freitag & I. von Barga (Hrsg.). *Praxisforschung in der Lehrerbildung* (95-104). Berlin: LIT-Verlag.
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. In: L. B. Resnick (Ed.). *The Nature of Intelligence* (231-236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Flavell, J. H. (1981). Cognitive monitoring. In: W. P. Dickson (Ed.). *Children's oral communication skills* (35-60). New York: Academic.
- Flavell, J. H. (1984). Annahmen zum Begriff Metakognition sowie zur Entwicklung von Metakognition. In: F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Hrsg.). *Metakognition, Motivation und Lernen* (23-31). Stuttgart: Kohlhammer.
- Fleming, S. M. (2021). *Know Thyself: The Science of Self-Awareness*. New York: Basic Books.
- Hasselhorn, M. & Artelt, C. (2018). Metakognition. In: D. H. Rost et al. (Hrsg.). *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie*. (520-526). Weinheim: Beltz.
- Hattie, J. (2008). *Visible Learning*. London: Routledge.
- Hiegeist, C. (2022). *Intensität von metakognitiven Aktivitäten bei Aufgabenbearbeitungen in Mathematik*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Osnabrück.
- Kahneman, D. (2012). *Schnelles Denken, langsames Denken*. München: Siedler.
- Kaiser, A., Kaiser, R., Lambert, A., Hohenstein, K. (2018). *Metakognition: Die Neue Didaktik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Kaune, C. (2001). Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist etwas mehr als „die etwas andere Aufgabe“. In: *Der Mathematikunterricht* 47 (1) (35-46).

- Kaune, C. (2006). Reflection and Metacognition in Mathematics Education – Tools for the Improvement of Teaching Quality. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (4) (350-360).
- Kaune, C. & Cohors-Fresenborg, E. (Hrsg.) (2010). *Mathematik Gut Unterrichten. Analyse von Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Kluwe, R. H. & Schiebler, K. (1984). Entwicklung exekutiver Prozesse und kognitive Leistungen. In: F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Hrsg.). *Metakognition, Motivation und Lernen* (31-60). Stuttgart: Kohlhammer.
- KMK (2004). *Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.12.2004. Bonn.
- Kramarski, B. & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. In: *American Educational Research Journal* 40 (1) (281-310).
- Krug, A. & Schukajlow, S. (2020). Entwicklung prozeduraler Metakognition und des selbstregulierten Lernens durch den Einsatz multipler Lösungen zu Modellierungsaufgaben. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 41 (2) (423-458).
- Lakoff, G. & Johnson, M. (2011). *Leben in Metaphern. Konstruktion und Gebrauch von Sprachbildern*. Heidelberg: Carl-Auer Verlag.
- Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In: Regina Bruder et al. (Hrsg.). *Handbuch der Mathematikdidaktik* (435-460). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Lingel, K., Neuenhaus, N., Artelt, C., Schneider, W. (2014). Der Einfluss des metakognitiven Wissens auf die Entwicklung der Mathematikleistung am Beginn der Sekundarstufe I. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 35 (1) (49-77).
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 38 (2) (113–142). DOI 10.1007/BF02655885.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. (12., überarbeitete Auflage). Weinheim und Basel: Beltz.

Nowińska, E. (2016). *Leitfragen zur Analyse und Beurteilung metakognitiv-diskursiver Unterrichtsqualität*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Nowińska, E. (2018). *Metakognitiv-diskursive Unterrichtsqualität. Eine Handreichung zu deren Analyse und Einschätzung in den Fächern Geschichte, Mathematik und Religion*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Nowińska, E. & Sjuts, J. (2019). Von der Oberflächen- zur Tiefenstruktur bei Unterrichtsanalysen. In: *SEMINAR – Lehrerbildung und Schule*. 25 (2) (112-130).

Pfister, J. (2020). *Kritisches Denken*. Ditzingen: Reclam.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 51 (27) (1-8).

Reusser, K. (1998). Denkstrukturen und Wissenserwerb in der Ontogenese. In: F. Klix & H. Spada (Hrsg.). *Enzyklopädie der Psychologie. Kognition. Band 6: Wissen*. (115-166). Göttingen, Bern, Toronto, Seattle.

Schiefele, U., Artelt, C., Schneider, W., Stanat, P. (Hrsg.) (2004). *Struktur, Entwicklung und Förderung von Lesekompetenz. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. Wiesbaden: VS Verlag.

Schneider, W. & Hasselhorn, M. (1988). Metakognitionen bei der Lösung mathematischer Probleme: Gestaltungsperspektiven für den Mathematikunterricht. In: *Heilpädagogische Forschung*. XIV (2) (113-118).

Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and Mathematics Education. In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 42 (2) (149–161). DOI 10.1007/s11858-010-0240-2.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding. In: E. A. Silver (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (361-380). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (334-370). New York: Macmillan.

- Schürstedt, C. (2021). *Analyse von Aufgabenbearbeitungen in Mathematik zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Osnabrück.
- Scott, B. M. & Levy, M. G. (2013). Metacognition: Examining the Components of a Fuzzy Concept. In: *Educational Research eJournal* 2 (2) (120-131). DOI: 10.5838/erej.2013.22.04.
- Sjuts, J. (2001). Metakognition beim Mathematiklernen: das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. In: *Der Mathematikunterricht* 47 (1) (61-68).
- Sjuts, J. (2002). Metacognition in Mathematics Lessons. In: H.-G. Weigand et al. (Eds.). *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Bern 1999* (76-87). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 24 (1) (18-40).
- Sjuts, J. (2005). Forschung und Entwicklung im Berufsfeld Schule. In: M. Fiegert & I. Kunze (Hrsg.). *Zwischen Lehrerbildung und Lehrerausbildung. Texte zur Geschichte, Gegenwart und Zukunft der Lehrerbildung in Osnabrück* (162-172). Münster: LIT-Verlag.
- Sjuts, J. (2006). Beim Denken gedacht, das Denken überwacht. Ideen der Metakognition beim Umgang mit Termen. In: *mathematik lehren* 136 (47-49).
- Sjuts, J. (2008). Aufgaben diagnostisch gestalten. Denkprozesse aufdecken und Verstehen fördern. In: *mathematik lehren* 150 (58-61).
- Sjuts, J. (2016). Darstellungen und Vorstellungen und ihre Bedeutung für eine wirksame Metakognition beim Problemlösen und Begründen. In: *Teaching Mathematics and Computer Science* (195-220). Debrecen. DOI: 10.5485/TMCS.2016.0423.
- Sjuts, J. (2018). Metakognitive Strategien in Mathematik. In: *mathematik lehren* 211 (20-24).
- Sjuts, J. (2019). Fehlerhaftes und Falsches beim mathematischen Denken – Melioration durch Metakognition. In: É. Vásárhelyi & J. Sjuts

(Hrsg.). *Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein. Was wir aus Fehlern lernen können. Ervin Deák zu Ehren* (227-241). Münster: WTM Verlag.

Sjuts, J. (2021). Schnelles Denken, langsames Denken und die Systemrelevanz von Metakognition. In: *MNU-Journal* 74 (1) (54-61).

Sjuts, J. (2022). Lehrerbildung als staatliche und gesellschaftliche Aufgabe angesichts gegenwärtiger und zukünftiger Herausforderungen. In: S.n Halverscheid, I. Kersten, B. Schmidt-Thieme (Hrsg.). *Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung. Analyse, Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen*. (31-45). Berlin: Springer.

Stanovich, K. E. & Stanovich, P. J. (2010). A framework for critical thinking, rational thinking, and intelligence. In: D. D. Preiss & R. J. Sternberg (Eds.). *Innovations in educational psychology: Perspectives on learning, teaching, and human development* (pp. 195–237). Springer Publishing Company.

Van der Stel, M., Veenman, M. V. J., Deelen, K., Haenen, J. (2010). The Increasing Role of Metacognitive Skills in Math: A Cross-Sectional Study from a Developmental Perspective. In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 42 (2) (219-229). DOI 10.1007/s11858-009-0224-2.

Veenman, M. V. J. & Van Hout-Wolters, B. H. A. M., Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: conceptual and methodological considerations. In: *Metacognition and Learning* 1 (1) (3–14).

Vorhölter, K. (2018). Conceptualization and Measuring of Metacognitive Modeling Competencies – Empirical Verification of Theoretical Assumptions. In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 50 (343-354). DOI 10.1007/s11858-017-0909-x.

Vorhölter, K., Krüger, A., Wendt, L. (2019). Metacognition in Mathematical Modeling – an Overview. In: S. A. Chamberlin & B. Sriraman (Eds.). *Affect in Mathematical Modeling* (29–51). Cham: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-030-04432-9_3

Wang, M. C., Haertel, G. D., Walberg, H. J. (1993). Toward a Knowledge Base for School Learning. In: *Review of Educational Research* 63 (3) (249–294).

Weinert, F. E. (1984). Metakognition und Motivation als Determinanten der Lerneffektivität: Einführung und Überblick. In: F. E. Weinert & R.

H. Kluwe (Hrsg.). *Metakognition, Motivation und Lernen* (9-21). Stuttgart: Kohlhammer.

Weinert, F. E. & Kluwe, R. H. (Hrsg.) (1984). *Metakognition, Motivation und Lernen*. Stuttgart: Kohlhammer.

Notation

Sjuts, J. (2022). Metakognition innerhalb von Aufgaben und Aufgabebearbeitungen in Mathematik Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis, 3. <https://doi.org/10.48648/r2r9-6d11>

Anhang:**Aufgabe „Vierstellige Zahlen mit Nebenbedingungen“**

Die Bedingungen dieser Aufgabe (Abbildung Anhang 1) erfüllen genau sechs Zahlen: 1302, 1311, 1320, 2301, 2310, 3300. Die Aufgabenerweiterung verlangt, sich einen Plan zur Lösung der Aufgabe zu überlegen und den Gedankengang zu erläutern. Sie enthält also eine Aufforderung zum *Explizieren* und in gewisser Weise auch eine Anregung zum *Variieren*.

Der Aufgabentext könnte zu einer falschen Annahme verleiten, nämlich der, statt vierstelliger Zahlen vierziffrige Zahlencodes zu betrachten. Mit dieser Rahmung käme 0 als erste Ziffer in Frage. Sieht man, nachdem man alle Möglichkeiten dieser Form gefunden hat, darin einen eigenen Erfolg, kommt zum *Rahmungseffekt* noch der *Bestätigungseffekt* hinzu.

Die Aufgabe besteht aus einem unverschachtelten, verstehbaren Satz. Dieser Satz enthält jedoch einige Fachbegriffe, die Verknüpfung zweier Bedingungen mit *und* sowie die Anforderung, *alle* in Frage kommenden Zahlen zu finden. Die sprachlogische Komplexität liegt daher auf Stufe 1. Zur Aufgabenerweiterung gehören zwei einfache Sätze. Das bedeutet Stufe 0.

Da bei der Aufgabenbearbeitung verschiedene Bedingungen zu beachten und alle Lösungselemente anzugeben sind, also mehrere Denkvorgänge ablaufen müssen, liegt die kognitive Komplexität auf Stufe 1.

Um den denkbaren Verzerrungen zu begegnen und die erwähnten Schwierigkeiten zu bewältigen, sind gewisse metakognitive Aktivitäten hilfreich. Sogar ausdrücklich gefordert ist eine Planung des Vorgehens; diesbezügliche metakognitive Aktivitäten (P1) sollten daher erkennbar sein. Da ein begriffliches Wissen (vierstellige Zahl, Quersumme, Ziffer, Stelle) von Bedeutung ist, sind eine Kontrolle (M2) und eine Reflexion (R2) von Begriffen angezeigt. Hinsichtlich der Struktur der Aufgabe und der Notation der Ergebnisse ist eine jeweilige Reflexion (R1, R3) erwartbar.

Die tatsächliche Bearbeitung (Abbildung Anhang 1) zeigt ein nachvollziehbares Vorgehen, das einem ausformulierten (P1, R1) Plan folgt. Eine Begriffsreflexion (R2) ist indirekt erkennbar. Die Notation der Lösungselemente geschieht entsprechend den Planungsüberlegungen (und ist farbig markiert). Sie ist systematisch (R3), und sie wird überprüft (M4,

R4). Die beiden letztgenannten metakognitiven Aktivitäten sind indes nicht unbedingt zu erwarten.

Die insgesamt ausgemachten metakognitiven Aktivitäten sind sehr ausgeprägt, ihre Intensität liegt auf der Stufe 2.

Aufgabe:	Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen mit der Quersumme 6 und der Ziffer 3 an der zweiten Stelle.		
Aufgabenerweiterung:	Denke dir einen Plan aus. Erläutere deine Gedanken.		
Art der Aufgabenerweiterung:	Explizieren, Variieren	Mögliche kognitive Verzerrungen:	Rahmungs- und Bestätigungseffekt
Sprachlogische Komplexität:	Stufe 1 (Aufgabe) Stufe 0 (Erweiterung)	Kognitive Komplexität:	Stufe 1 (Aufgabe und Erweiterung)
Aufgabenbearbeitung (Abschrift vom Original in einem Ausschnitt):	<p>• <u>Erstmal die 3 an die 2. Stelle.</u></p> $\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ \hline & & & \end{array}$ <p>• <u>Dann Überlegen, wie viel man noch für die Quersumme benötigt (in dem Fall 3).</u></p> $\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 0 \\ \hline & & & \end{array}$ <p>• <u>Dann erstmal immer vorne 1</u></p> $\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 2 \\ \hline & & & \end{array}$ <p>↳ <u>dann die 3 dazu</u></p> $\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline & & & \end{array}$ <p>↳ <u>dann den übrigen Rest auf die restlichen 2 Stellen aufteilen</u></p> $\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \hline & & & \end{array}$ <p>• <u>Schließlich vorne mit 2</u></p> $\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 0 & 0 \\ \hline & & & \end{array}$ <p>• <u>Schließlich vorne mit 3</u></p> <p>Am Ende schauen, ob man die einzelnen Ziffern noch vertauschen kann.</p>		
	Zweckmäßige metakognitive Aktivitäten:		Rekonstruierte bzw. fehlende metakognitive Aktivitäten:
Planung:	P1		Intensität 2 (P1)
Monitoring:	M2		Intensität 2 (M2), Intensität 1 (M4)

Reflexion:		<i>R1, R2, R3</i>		<i>Intensität 2 (R1, R2, R3), Intensität 1 (R4)</i>
Defizite:				

Abbildung Anhang 1: Aufgabenbearbeitung „Vierstellige Zahlen mit Nebenbedingungen“

Kurzfasit: Die Aufgabe ist korrekt gelöst. Die Erläuterungen sind elaboriert. Die hohe Intensität der metakognitiven Aktivitäten hinsichtlich Planung, Monitoring und Reflexion sichert den Gedankengang und die Darstellung der Aufgabenbearbeitung erkennbar ab.

Aufgabe „Vielecke: Eckpunkte und Diagonalen“

Die Lösung der Aufgabe (Abbildung Anhang 2) lautet: Nur beim Fünfeck ist die Anzahl der Diagonalen gleich der Anzahl der Eckpunkte. Diese Aussage lässt sich für ein beliebiges n-Eck mit dem Ansatz $n \cdot (n - 3) : 2 = n$ beweisen.

Erforderlich in der Aufgabenbearbeitung ist hingegen eine Auseinandersetzung mit drei namentlich zugeordneten Behauptungen, die es zu prüfen gilt. Dafür sind begründende und erklärende Entgegnungen zu finden. Die Erweiterung soll durch die Anforderungen des *Analysierens*, *Explizierens* und gegebenenfalls des *Variierens* metakognitive Aktivitäten auslösen.


Kognitive Verzerrungen können bei der Bearbeitung der Aufgabe durch nicht adäquate Vorstellungen geometrischer Begriffe entstehen. Weiß man nicht genau, was Diagonalen in einem Vieleck sind (weil man auch Seiten für Diagonalen hält oder nur die Verbindungen gegenüberliegender Eckpunkte, wie das beim Viereck der Fall ist), oder kann man sie nicht genau abgrenzen von anderen besonderen Linien (wie etwa Seitenhalbierenden oder Winkelhalbierenden im Dreieck), kann es zu *Rahmungs-* und *Bestätigungseffekten* kommen.

Die sprachlogische Komplexität der Aufgabe wie auch der Aufgabenerweiterung liegt auf Stufe 1. Es handelt sich um einfache Haupt- und Nebensätze, allerdings ist die Schrittfolge der Bearbeitung nicht direkt ersichtlich.

Da mehrere Behauptungen sowie einige Begriffe (Vieleck, Diagonale, Eckpunkt) hinsichtlich ihrer genauen Bedeutung zu beachten sind, zudem logische Beziehungen eine wesentliche Rolle spielen, liegt die kognitive Komplexität auf Stufe 2.

Die Anforderungen der Aufgabe und der Aufgabenerweiterung lassen mehrere metakognitive Aktivitäten angeraten erscheinen. Es gilt, eine Reflexion der Aufgabenstruktur (R1), eine Reflexion der Begriffe (R2) und eine Kontrolle der vorliegenden Äußerungen (M5) in Verbindung mit der Erstellung unterstützender Darstellungen (R3) vorzunehmen. Zudem sind durchweg die Adäquatheit und die Zulässigkeit des Vorgehens (Beispiel, Gegenbeispiel) zu kontrollieren (M4) und zu reflektieren (R4). Für die zu treffenden Beurteilungen, wer Recht hat und wer nicht, sind reflektierende Einschätzungen (R8) erforderlich.

Die hier ausgewählte Aufgabenbearbeitung (Abbildung Anhang 2) bestätigt die Vorweganalyse in vielerlei Hinsicht. Die skizzierten Vielecke offenbaren Defizite bei Begriffen (D2) und Darstellungen (D3). Beim Dreieck sind Seitenhalbierende eingezeichnet, beim Fünfeck drei Quasi-Seitenhalbierende und eine Diagonale, beim Sechseck und Achteck nur die Diagonalen von einander gegenüberliegenden Eckpunkten. Lediglich die Skizze zum Viereck ist korrekt (R3). Die darauf basierende Argumentation (M5, R1, R2, R4, R8) ist zutreffend, aber nur diese. Ansatzweise ist eine Auseinandersetzung mit den logischen Beziehungen und der Richtigkeit der Behauptungen erkennbar. Hier (R4, R8) kann von einer Intensität auf Stufe 1 gesprochen werden. Alle anderen metakognitiven Aktivitäten liegen auf Stufe 0.

Aufgabe:	Bei welchem Vieleck ist die Anzahl der Diagonalen gleich der Anzahl der Eckpunkte?		
Aufgabenerweiterung:	<i>Anna sagt, es ist ein Dreieck, Benedikt meint, es ist ein Fünfeck. Carla äußert, dass jedes Vieleck in Frage kommt. – Wer hat Recht? Begründe deine Antwort und gib den beiden anderen eine Erklärung, warum ihre Behauptungen nicht zutreffen.</i>		
Art der Aufgabenerweiterung:	<i>Analysieren, Explizieren, Variieren</i>	Mögliche kognitive Verzerrungen:	<i>Rahmungs- und Bestätigungseffekt</i>
Sprachlogische Komplexität:	<i>Stufe 1 (Aufgabe und Erweiterung)</i>	Kognitive Komplexität:	<i>Stufe 2 (Aufgabe und Erweiterung)</i>
Aufgabenbearbeitung (Abschrift vom Original in einem Ausschnitt):			

<p>Carla hat unrecht. Bei einem Dreieck stimmt es, dass gleich viele Diagonale wie Eckpunkte vorhanden sind, aber bei einem Quadrat zum Beispiel sind es 4 Ecken und nur 2 Diagonale.</p> <p>Bei einem Fünfeck und bei einem Sechseck sind es auch weniger Diagonale als Eckpunkte.</p> <p>Es sind nur bei einem Dreieck jeweils gleich viele Diagonale und Eckpunkte, bei allen anderen Vielecken nicht.</p>		
	Zweckmäßige metakognitive Aktivitäten:	Rekonstruierte bzw. fehlende metakognitive Aktivitäten:
Planung:		
Monitoring:	<i>M4, M5</i>	<i>Intensität 0 (M4, M5)</i>
Reflexion:	<i>R1, R2, R3, R4, R8</i>	<i>Intensität 0 (R1, R2, R3), Intensität 1 (R4, R8)</i>
Defizite:		<i>D2, D3</i>

Abbildung Anhang 2: Aufgabebearbeitung „Vielecke: Eckpunkte und Diagonalen“

Kurzfasit: Abgesehen von der Argumentation zum Viereck sind in der ansonsten inkorrekten Aufgabebearbeitung wesentliche begriffliche und darstellerische Defizite auszumachen. An hilfreichen metakognitiven Aktivitäten, diesen Defiziten wirksam zu begegnen, liegen nur wenige mit geringer Intensität vor. Weitgehend fehlen sie aber.

Aufgabe „Subtraktion von Klammertermen“

Das richtige Ergebnis der Aufgabe zur Termvereinfachung (Abbildung Anhang 3) ist 48.

Die Aufgabenerweiterung verlangt in Teilaufgabe a) eine Analyse einer vorgelegten fehlerhaften Aufgabebearbeitung und in Teilaufgabe b) eine eigene Lösung samt Begründung. Eine Abänderung der vorhandenen Aufgabebearbeitung zuzüglich einer Fortsetzung ist durchaus naheliegend. Die Erweiterung der Aufgabe regt durch *Analysieren*, *Explizieren* und *Synthetisieren* zu metakognitiven Aktivitäten an.

Der in der Aufgabe angegebene Term kann kognitive Verzerrungen hervorrufen. Die Vielzahl der Minuszeichen mag einerseits dazu führen, ein negatives Resultat anzunehmen, die Anzahl der Klammern andererseits, dass das Ergebnis 50 ist. In beiden Fällen ist von einem *Rahmungseffekt* auszugehen.

Die sprachlogischen Hürden sind unterschiedlich hoch. Vom Aufgabenteil a) sind erst die sprachlichen Informationen zu verarbeiten, bevor die Kommentierung beginnt. Dafür steht Stufe 1 der sprachlogischen Komplexität. Die einfache Anweisung im Aufgabenteil b) liegt auf Stufe 0. Die kognitiven Anforderungen sind dagegen höher. Hier gilt es, die aus der Termdarstellung (mit Minuszeichen, Klammern und Auslassungspünktchen) resultierenden Rechenoperationen sorgfältig zu identifizieren und korrekt zu vollziehen. Die kognitive Komplexität ist daher auf Stufe 2 anzusiedeln.

Die für die Bewältigung der kognitiven Komplexität hilfreichen metakognitiven Aktivitäten betreffen die Analyse der Struktur der Termdarstellung (R1) sowie die Kontrolle und Reflexion der dem Term zu entnehmenden und dann durchzuführenden Rechenoperationen (M1, R4). Eine darauf bezogene abschließende reflektierende Evaluation (R8) ist geboten.

Das, was in der ausgewählten Aufgabenbearbeitung steht (Abbildung Anhang 3), ist korrekt. Allerdings gibt es zum Aufgabenteil a) lediglich eine Beschreibung des Vorgehens und auch keinen Kommentar zum Ergebnis (D5). Im Aufgabenteil b) finden sich zwar nur die ersten Bestandteile der Termdarstellung, aber den Rest kann man sich selbstverständlich denken. Insgesamt lassen die knapp notierten Rechengvorgänge und die erläuternden Ausführungen darauf schließen, dass metakognitive Aktivitäten (M1, R1) stattgefunden haben. Eine rückblickende Überprüfung (R8) ist nicht erkennbar.

Die Intensität der metakognitiven Aktivitäten liegt im Aufgabenteil a) auf der Stufe 0 und im Aufgabenteil b) auf der Stufe 1 (abgesehen von der nicht vorhandenen Abschlussreflexion).

Aufgabe:	$(1 - 2) - (3 - 4) - (5 - 6) - \dots - (99 - 100) =$
Aufgabenerweiterung:	a) <i>Juliane hat ihre Bearbeitung so aufgeschrieben:</i>

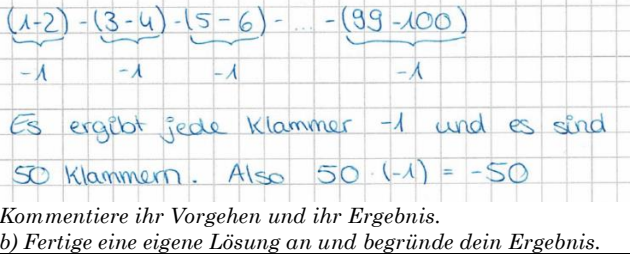
			
<p>Art der Aufgabenerweiterung:</p>	<p>Analysieren, Explizieren, Synthetisieren</p>		<p>Mögliche kognitive Verzerrungen: Rahmungsverzerrung</p>
<p>Sprachlogische Komplexität:</p>	<p>Stufe 0 (Aufgabe) Stufe 1 (in a) und 0 (in b)</p>		<p>Kognitive Komplexität: Stufe 2 (Aufgabe und Erweiterung)</p>
<p>Aufgabenbearbeitung (Abschrift vom Original in einem Ausschnitt):</p>	<p>Sie rechnet die Klammern aus und nimmt das Ergebnis mal 50, denn es sollen 50 Klammern mit dem gleichen Ergebnis sein. So kommt sie auf -50.</p> $(1-2) - (3-4) - (5-6)$ $-1 \quad \quad 1 \quad \quad 1$ <p>Jede Klammer ergibt 1 bis auf die erste, wo kein - vorsteht. So muss man $49 \cdot 1 = 49$ rechnen und dann -1 wegen der ersten Klammer, also $49 - 1 = 48$.</p>		
	<p>Zweckmäßige metakognitive Aktivitäten:</p>		<p>Rekonstruierte bzw. fehlende metakognitive Aktivitäten:</p>
<p>Planung:</p>			
<p>Monitoring:</p>	<p>M1</p>		<p>Intensität 1 (M1)</p>
<p>Reflexion:</p>	<p>R1, R4, R8</p>		<p>Intensität 0 (R1 in a, R8 in a und b), Intensität 1 (R1, R4 in b)</p>
<p>Defizite:</p>			<p>D5</p>

Abbildung Anhang 3: Aufgabenbearbeitung „Subtraktion von Klammertermen“

Kurzfasit: Die Ausführungen im Aufgabenteil a) haben lediglich beschreibenden Charakter. Die Intensität der metakognitiven Aktivitäten im Aufgabenteil b) ist geeignet, die Korrektheit der nicht einfachen Rechen- und Denkvorgänge abzusichern. Eine explizite Evaluation von Ergebnissen liegt in beiden Aufgabenteilen nicht vor.

Aufgabe „Ganze Zahl“

Die Lösung der Aufgabe (Abbildung Anhang 4): Zwischen $99 \cdot 101$ und $100 \cdot 100$ liegt keine ganze Zahl.

Das Vorgehen könnte so aussehen: Man rechnet die Produkte aus und erhält $99 \cdot 101 = 9999$ und $100 \cdot 100 = 10000$. Die Betrachtung der Zahlen 9999 und 10000 macht ersichtlich, dass es aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind und zwischen ihnen folglich keine ganze Zahl liegt.

In der Aufgabenerweiterung stecken Aufforderungen zum *Explizieren*, *Analysieren* und *Formalisieren*, bei denen metakognitive Aktivitäten erfolgen sollen. Das ist unmittelbar klar hinsichtlich einer vorzunehmenden Termanalyse und einer zu erbringenden Erläuterung des Vorgehens in der Aufgabenbearbeitung. Jedoch ist zudem zu bedenken, dass hier eine Auseinandersetzung mit Wissensrepräsentationen stattfinden muss. Es geht um das Erfassen und Vorstellen formaler Ausdrücke. Dass Notationen indes unterschiedlich aufgenommen werden können, wird im Folgenden deutlich.

Kognitive Verzerrungen sind in Bearbeitungen dieser Aufgabe durchaus erwartbar. Erstens kann es zu einem *Verankerungseffekt* kommen: Man entnimmt den Ausdrücken $99 \cdot 101$ und $100 \cdot 100$ zum einen die Zahlen 99 und 100 und zum anderen die Zahlen 100 und 100. Die gestellte Frage richtet sich dann – unzulässigerweise – auf die jeweiligen zwei Zahlen. Zweitens ist ein *Rahmungseffekt* möglich: Man orientiert sich an der vergleichenden Betrachtung der ausgerechneten Zahlen 9999 und 10000 und nimmt dabei nicht Zahlen, die dazwischen liegen, in den Blick, sondern den Abstand. Der Abstand existiert, er ist 1 und ganzzahlig. Eine dazwischenliegende ganze Zahl existiert dagegen nicht. Die eine – unzutreffende – Rahmung führt zu einem Zahlenergebnis, die andere – zutreffende – Rahmung führt zu keinem Zahlenergebnis. Darin könnte drittens noch ein *Bestätigungseffekt* gesehen werden.

Die Grundaufgabe besteht zwar aus einem einzelnen Fragesatz, die Lösungsaktivitäten und ihre Schrittfolge sind jedoch nicht direkt ersichtlich. Es liegt somit Stufe 1 der sprachlogischen Komplexität vor. Anders ist es bei der Aufgabenerweiterung. Sie enthält eine einfache Formulierung und liegt daher auf Stufe 0.

Da für die Bearbeitung der Aufgabe mehrere Vorüberlegungen einschließlich genauer Berücksichtigung von Begrifflichkeit und Notation anzustellen sind, liegt die kognitive Komplexität auf Stufe 2.

Als unterstützend für die Bearbeitung der Aufgabe können mehrere metakognitive Aktivitäten gelten, so eine Analyse von Struktur (R1), Begrifflichkeit (R2) und Notation (R3), eine Wirkungsanalyse (R4) sowie eine Kontrolle der Argumentation (M5).

Aufgabe:	Welche ganze Zahl liegt zwischen $99 \cdot 101$ und $100 \cdot 100$?			
Aufgabenerweiterung:	Erläutere dein Vorgehen.			
Art der Aufgabenerweiterung:	Explizieren, Analysieren, Formalisieren		Mögliche kognitive Verzerrungen:	Verankerungs-, Rahmungs- und Bestätigungsverzerrung
Sprachlogische Komplexität:	Stufe 1 (Aufgabe) Stufe 0 (Erweiterung)		Kognitive Komplexität:	Stufe 2 (Aufgabe und Erweiterung)
Aufgabenbearbeitungen (Abschriften vom jeweiligen Original in einem Ausschnitt):	<p>I:</p> <p>Zwischen 99 und 101 liegt die Zahl 100. Man muss einfach zählen (und richtig lesen).</p> <p>Zwischen 100 und 100 gibt es keine ganzen Zahlen, weil es zweimal die gleiche Zahl ist.</p> <p>II:</p> $\begin{array}{r} 99 \cdot 101 \\ \underline{} \\ 9900 \\ 000 \\ 99 \\ \hline 9999 \end{array}$ $\begin{array}{r} 100 \cdot 100 \\ \underline{} \\ 100 \\ 0000 \\ 000 \\ \hline 10000 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10000 \\ - 9999 \\ \hline 1 \end{array}$ <p>Es liegt eine 1 zwischen den beiden Zahlen.</p>			

	Zweckmäßige metakognitive Aktivitäten:	Rekonstruierte bzw. fehlende metakognitive Aktivitäten:
Planung:		
Monitoring:	I und II: <i>M5</i>	I: <i>Intensität 0 (M5)</i> , II: <i>Intensität 0 (M5)</i>
Reflexion:	I und II: <i>R1, R2, R3, R4</i>	I: <i>Intensität 0 (R1, R3)</i> , II: <i>Intensität 1 (R1), Intensität 0 (R2, R4)</i>
Defizite:		I: D1, D3, II: D2, D5

Abbildung Anhang 4: Aufgabenbearbeitungen „Ganze Zahl“

Zu einer Auswertung liegen zwei Aufgabenbearbeitungen vor (Abbildung Anhang 4).

I: Feststellbar sind die Defizite D1 und D3. Nützliche metakognitive Aktivitäten, insbesondere R1 und R3, sind unterblieben. Deren Intensität liegt daher auf der Stufe 0.

II: Von den sichtbaren metakognitiven Aktivitäten befindet sich lediglich die Strukturanalyse (R1) zu den zwei Produkten als Zahldarstellung auf der Stufe 1. Die Defizite D2 und D5 vermindern die Intensität der andeutungsweise vorhandenen Reflexion (R4), die damit ebenso wie R2 auf der Stufe 0 liegt.

Kurzfasit: Den mit kognitiven Verzerrungen in Verbindung stehenden Defiziten in den beiden Aufgabenbearbeitungen I und II ist mit keiner metakognitiven Aktivität von erkennbarer Intensität begegnet worden. Die Aufgabe ist in beiden Fällen ungelöst.