ISSN 2701-9012 ZMFP, Vol.5 (2024)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Maria Wendt & Sebastian Schorcht

Kombinatorik im historischen Verlauf – Mathematikgeschichte im Grundschulunterricht

Zusammenfassung

Der vorliegende Artikel beleuchtet die Integration eines historischen Beispiels aus der Kombinatorik in den Mathematikunterricht der Grundschule und die daraus resultierenden Erkenntnismöglichkeiten für Kinder. Die Auswahl des Beispiels orientiert sich an vier Zielen: Gegenwartsbezug, Historizität, Identität und Orientierung. Um den aktuellen Forschungsstand darzustellen, werden Fragen bezüglich der Auswahl passender mathematikhistorischer Beispiele, deren Funktionen und Ziele, Methoden sowie die Effektivität dieser Ansätze diskutiert. Der Artikel fasst wichtige Entwicklungen in der Kombinatorik im Allgemeinen und der Partitionen von Aristoteles bis ins 20. Jahrhundert im Besonderen zusammen und analysiert eine Zerfällungstafel von Leibniz, die für den Unterricht aufbereitet wurde. Als Fallbeispiel dient Melinas Umgang mit dieser Tafel, welcher Einblicke in die praktische Anwendung mathematikhistorischer Inhalte im Grundschulunterricht bietet.

Schlagworte

Geschichte der Mathematik, Kombinatorik, Grundschulunterricht, Zahlzerlegung, Leibniz

Maria Wendt & Prof. Dr. Sebastian Schorcht, TU Dresden, Weberplatz 5, 01217 Dresden, Deutschland.

e-mail: maria.wendt@tu-dresden.de; sebastian.schorcht@tu-dresden.de

1. Bildungswert?!

„Kann in der Mathematik überhaupt noch etwas Neues entdeckt werden?“ – konfrontiert mit dieser Frage im Lehrkräftezimmer, kann man zu der Überlegung gelangen, ob einige Menschen Mathematik als ein abgeschlossenes Wissensgebiet betrachten, das bereits seine maximale Entwicklung erreicht hat und in einem Zustand mathematischer Vollkommenheit verharrt. Eine eigene Studie zum Thema zeigt, dass durchaus Überzeugungen in diese Richtung existieren (Buchholtz & Schorcht, 2019). Ein Blick zurück in die Geschichte macht jedoch deutlich, dass Mathematik nicht stillsteht, sondern sich unaufhörlich weiterentwickelt – eine fesselnde Tatsache, die ihre Bedeutung als Bildungsinhalt umso mehr im Lichte dieser Frage unterstreicht. Denn gerade dieser historische Wandel im mathematischen Handeln unterstreicht unter anderem eine kreative, vom Menschen beeinflusste Seite der Mathematik, die beispielsweise auch bei der Lösung mathematischer Probleme im Unterricht schon eine entscheidende Rolle spielt.

Eine Möglichkeit, Mathematik im Entstehen wahrzunehmen, ist die Integration mathematikhistorischer Beispiele in das Lehren und Lernen von Mathematik. Aus einer bildungstheoretischen Perspektive (Schorcht, 2018; Chorlay, Clark & Tzanakis, 2022) heraus soll Mathematikgeschichte für Lernende

- auf Fragestellungen zur mathematischen Gegenwart der Lernenden eingehen. (**Sinnbildung durch Gegenwartsbezug**)
- den Entwicklungsprozess von Mathematik zeigen, indem die Veränderung durch historische Fremdheitserfahrungen, sogenannte Alteritätserfahrungen, in den Mittelpunkt gestellt wird. (**Historizität**)
- gleichermaßen Darstellungen von bekannten Persönlichkeiten und nicht überregional bekannten Personen in verschiedenen Kulturen zeigen, die einen Einfluss auf Mathematik hatten. (**Identität**)
- die geforderte mathematische Handlung zusätzlich mit der Einsicht in deren Ziele und Zwecke bereichern. (**Orientierung**)

Der vorliegende Beitrag greift diese bildungstheoretischen Ziele auf, reichert sie mit Erkenntnissen der aktuellen internationalen Forschung an und zeigt in einer Fokussierung auf die Entwicklung der Kombinatorik, wie eine Integration mathematikhistorischer Inhalte gestaltet sein kann. Abschließend soll an einem Fallbeispiel gezeigt werden, wie eine Einbindung in den Unterricht der Grundschule gelingt.

2. Forschungsstand

Die zentralen Themen, die sich als roter Faden durch die Forschung zum Einsatz der Mathematikgeschichte im Unterricht ziehen, können in folgenden vier Fragen formuliert werden (Clark et al., 2018, 2019; Chorlay, Clark & Tzanakis, 2022; deutsche Übersetzung Schorcht):

Welche Episoden der Mathematikgeschichte sind für den Mathematikunterricht geeignet, sachgerecht und relevant?

Welche Funktion und Zielsetzung kann Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht einnehmen?

Durch **welche Methoden** kann Geschichte der Mathematik die pädagogische Praxis unterstützen?

Welche Wirksamkeit besitzt Mathematikgeschichte im Unterricht?

Aktuelle Forschungsbemühungen, besonders im internationalen Raum, versuchen diese vier Fragen zu beantworten. Es bilden sich dabei unterschiedliche Herangehensweisen heraus, welche teilweise zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Die internationale Forschungsgemeinschaft der HPM (**H**istory and **P**edagogy of **M**athematics) ist bemüht, diese unterschiedlichen Ansichten zusammenzufassen und empirische wie theoretische Forschungsarbeiten zu unterstützen. Im Folgenden sollen nur Ausschnitte des Forschungsstands näher erläutert werden. Eine breite Auflistung findet sich bei Clark et al. (2018, 2019) oder Chorlay, Clark & Tzanakis (2022).

Welche Mathematikgeschichte ist für den Mathematikunterricht geeignet, sachgerecht und relevant?

Sinnbildung durch Gegenwartsbezug – Um die eigenen Überzeugungen eines starren Mathematikbilds hinterfragen zu können, müssen wir uns darüber im Klaren sein, dass Mathematik auch eine veränderliche und anpassungsfähige Seite besitzen kann. Mit der

Darstellung von Axiomen, Sätzen und Beweisen oder Gesetzen und Regeln, also dem fertigen mathematischen Produkt, wird solch ein Unterfangen jedoch nur schwierig realisierbar. Die innewohnende Schönheit dieser deduktiven Ordnung kann für Lernende erst greifbar werden, wenn genügend Erfahrungen im Mathematiktreiben bestehen und sich die verschiedenen Teilbereiche der Mathematik als chaotische Sammlung vor ihnen ausbreiten. Erst mit einer intrinsischen Motivation zum Ordnen der Sätze und Beweise bei den Lernenden kann die Wirkmächtigkeit der Ordnung erfasst werden. Ohne diese Motivation begünstigt die Darbietung der deduktiv geordneten Sammlung vermutlich nur die Sicht auf Mathematik als abgeschlossene Wissenschaft. Im Rahmen des Lernens und Lehrens von Mathematik besteht folglich die Möglichkeit, dieses entweder ausgehend von mathematischen Produkten oder durch eine intensivere Auseinandersetzung mit dem mathematischen Prozess zu gestalten. Mathematik wird in einem handlungsorientierten Unterricht als Prozess der Wissensproduktion – durch die eigene Arbeit an mathematischen Objekten – verstanden und motiviert im Idealfall zu einer logisch strukturierten, deduktiv geordneten Sammlung intellektueller Produkte.

Die Unterscheidung zwischen Prozess und Produkt – dem Handeln an mathematischen Objekten und der Darstellung dessen Ergebnisse – ist im Handlungsverlauf mit der Unterscheidung zwischen Zeitspanne und Zeitpunkt vergleichbar. Zum einen repräsentiert die Zeitspanne die Entstehung des Produkts, folglich den Prozess, zum anderen repräsentiert der Zeitpunkt eine Momentaufnahme im Prozess, folglich das reine Produkt. Während Schülerinnen und Schüler Zeitspannen und Zeitpunkte mathematischen Handelns zunächst auf eigene Erfahrungen beziehen und im eigenen Mathematiktreiben erkennen, sind Zeitspannen und Zeitpunkte auch im historischen Verlauf sichtbar. Besonders spannend wird diese historische Perspektive, wenn Zeitspannen mathematischer Entwicklungen bis in die Gegenwart der Schülerinnen und Schüler reichen. Die mathematischen Produkte erhalten aus der Perspektive der gesamtgesellschaftlichen Entwicklung eine zeitliche Dimension.

Auch der Soziologe und Philosoph Goldmann (1971) betont die besondere Bedeutung historischer Prozesse, insbesondere wenn sie nachhaltige Auswirkungen auf die Gegenwart haben. Die Bedeutsamkeit historischer

Themen ergibt sich aus ihrer Relevanz für die gegenwärtigen Verhältnisse oder ihrer Bedeutung für die Beantwortung zukunftsgerichteter Fragen. Eine ähnliche Position befürworten auch Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler in der Geschichtsdidaktik, die Geschichte nicht um der Geschichte willen betreiben, sondern sich mit dieser aus gegenwärtigen Fragen heraus beschäftigen: „Bezugspunkt für unsere Beschäftigung mit Vergangenheit ist stets die Gegenwart. Aus ihr kommt zuallererst unser Interesse an der Vergangenheit, stammen die Fragen, die wir an sie anlegen, auf sie beziehen wir die Lehren, die wir uns vielleicht aus der Vergangenheit erhoffen“ (Sauer, 2009, S. 91). Historikerinnen und Historiker sprechen von einer Orientierung an gegenwärtigen Phänomenen, denn erst an aktuell existierenden Gegenständen ist historische Interpretation möglich: „ohne diese Gegenwärtigkeit lässt sich die Vergangenheit nicht hinreichend als Geschichte thematisieren […]. Nur von ihr her öffnet sich der Blick auf die Vergangenheit, in dem diese als Geschichte erscheint und deutend realisiert werden kann. Prä-narrativ stößt sie das Erzählen an“ (Rüsen, 2001, S. 83).

Hinsichtlich des notwendigen Gegenwartsbezugs beim Einsatz mathematikhistorischer Themen ergeben sich mit den Arbeiten von Grattan-Guinness (2004a, 2004b) zwei mögliche Auswahlprinzipien für Zeitspannen: „History“ oder „Heritage“. Während die Fokussierung auf „History“ die Entwicklung des mathematischen Begriffs über eine bestimmte Periode in den Blick nimmt (Was passierte in der Vergangenheit?), fokussiert „Heritage“ den Einfluss der Entwicklungen auf spätere mathematische Begriffe (Wie sind wir hier gelandet?). Demnach können Zeitspannen untersucht werden, die in der Vergangenheit beginnen und enden („History“) – beispielweise die ägyptische Bruchrechnung – als auch solche, die in der Vergangenheit beginnen und in der bezugnehmenden „Gegenwart“ enden („Heritage“) – beispielsweise die Verwendung der negativen Zahlen vom Mittelalter bis heute. Beide Auswahlprinzipien haben ihre Berechtigung, weil sie Fragen der Gegenwart beantworten. Wenn Themen der Mathematikgeschichte für den Unterricht ausgewählt werden, ist die jeweilige Auswahl immer am Interesse der Schülerinnen und Schüler auszurichten.

Historizität – Eine weitere mögliche Auswahl von Themen ist die Fokussierung des Unterrichts auf die Andersartigkeit vergangener

Gegenstände, Rüsen (2001, S. 83) nennt dies „zeitliche Alterität“. Diese Andersartigkeit bzw. zeitliche Alterität wird durch gegenwärtige und vergangene Objekte aus unterschiedlichen Zeiten hervorgerufen. Ihre Unterschiede zeigen sich im zeitlichen Kolorit, der durch Entwicklungsprozesse entsteht, so Rüsen. Ein Beispiel für dieses zeitliche Kolorit sind die Notizen von Leibniz (siehe Abb. 1), die im weiteren Verlauf des vorliegenden Beitrags thematisiert werden. Die unterschiedlichen Darstellungen geben Anlass für eine Beschäftigung mit der Entwicklungsgeschichte, dienen demnach als Ausgangspunkt zu Erklärung und Erzählung der Genese der Mathematik. Zur Klärung wird die Darlegung des historischen Prozesses notwendig. Mathematik ist dann nicht nur als Produkt der Gesellschaft zu verstehen, sondern auch als Entwicklungsprozess. Sie erhält eine „zeitliche Tiefendimension“ (Rüsen, 2001, S. 83) oder auch eine Historizität (Barbin et al., 2020; Radford, Furinghetti & Katz, 2007; Grabiner, 1974; Radford et al., 2014).

Neben verwendbaren Beispielen existieren im Verlauf der Geschichte mathematische Entwicklungen, die zu Sackgassen und Problemen führen und deshalb in der Gegenwart nicht mehr verwendet werden – beispielsweise die Entwicklung der Notation von Zahlzeichen bei den Maya oder Inka. Es stellt sich die Frage, weshalb diese Themen im Mathematikunterricht behandelt werden sollten. In der Tat ist die Auswahl der Themen hierbei kritisch zu beleuchten. Verschiedene Notationen der Zahlzeichen – beispielsweise west-arabische und römische Zahlzeichen – sind dann sinnvoll, wenn diese die zeitliche Alterität und damit die Historizität bereichern oder den Blick auf das kulturelle Gesamtwerk der Mathematik lenken. Ebenso zielführend ist die Fokussierung auf die Ziele und Zwecke der Notationsweisen und die Herausforderungen und Chancen diese für die unterschiedlichen Kulturen bieten.

Identität – Viele verschiedene Kulturen haben dazu beigetragen, die Mathematik stetig zu erweitern und zu verändern. Im Jankvist’schen Sinne (2009a) stellt die Integration der Geschichte der Mathematik im Unterricht eine Gelegenheit dar, um die Beiträge von Personen und verschiedenen Kulturen an der Entwicklung der Mathematik aufzuzeigen. Es sei nur an die Beiträge der griechischen oder arabischen Kultur zu denken oder die Entdeckungen durch die asiatischen und mittelamerikanischen Gesellschaften. Mathematik wird nicht zuletzt von Menschen betrieben, die innerhalb ihrer Kulturkreise wirken und leben.

Heymann (1996) betont die Bedeutung der kulturellen Kontinuität und Identität und hebt die Rolle der Mathematikgeschichte im Unterricht hervor. Kulturelle Kontinuität wird durch die Übernahme der historisch gewachsenen Kultur sichergestellt. Heymann weist jedoch darauf hin, dass eine kreative Kulturentwicklung nur durch eine kritische Haltung zur historischen Kultur möglich ist. Die tägliche Anwendung von Mathematik kann diese Übernahme oder kritische Haltung fördern. Die reine Darstellung von Biografien mathematischer Persönlichkeiten kann jedoch die kritische Haltung erschweren, da jüngere Schülerinnen und Schüler sich eher mit Personen aus dem nicht-öffentlichen Leben identifizieren können als mit berühmten Persönlichkeiten (Beilner, 2004). In der Geschichtsdidaktik gibt es zwei Begriffe, die diese Darstellung von Personen benennen: „Personalisierung“ und „Personifizierung“.

Personalisierung bezieht sich auf die Darstellung von großen, überregional bekannten Persönlichkeiten und deren Handlungen. Im Kontext der Mathematikgeschichte würde dies das mathematische Handeln von berühmten Persönlichkeiten wie den Pythagoreern, Rechenmeistern oder Schreibern umfassen. Diese Gruppen sind namentlich bekannt und werden oft in der Geschichte hervorgehoben, weil sie für bestimmte mathematische Entwicklungen oder Handlungen privilegiert waren.

Personifizierung hingegen bezieht sich auf die Darstellung von Personen des nicht-öffentlichen Lebens, also Personen, die nicht überregional bekannt sind. Dies könnten Personen aus alltäglichen Berufsgruppen wie Bauern, Kaufleute oder Bäcker sein. Der Zweck der Personifizierung im Unterricht ist es, zu zeigen, dass historische Ereignisse und Entwicklungen nicht nur von berühmten Persönlichkeiten beeinflusst wurden, sondern auch von Menschen des „Alltags“.

Es geht darum, sowohl die Beiträge großer Persönlichkeiten als auch die von weniger bekannten Individuen zu erkennen und zu würdigen. Im Mathematikunterricht kann diese Perspektive dazu beitragen, eine interkulturelle Sichtweise einzunehmen und zu verstehen, dass Mathematik ein kulturübergreifendes Gemeinschaftswerk ist (Tzanakis et al., 2000). Zudem ermöglicht es den Lernenden, die eigene kulturelle Identität auszubilden und zu stärken (Heymann, 1996).

Orientierung – Mathematik ist auch externen Einflüssen ausgesetzt, die ihre jeweiligen Ziele und Zwecke verfolgen. Mit der Thematisierung der Mathematikgeschichte im Unterricht stehen nicht allein die einfache Übernahme einer etablierten Tradition im Vordergrund, sondern vielmehr die mannigfaltigen Einflüsse, die auf die Mathematik eingewirkt haben und weiterhin Einfluss ausüben. Dies betrifft sowohl technische Anforderungen der jeweiligen Zeit – wie die Nutzung des Binärsystems in der Digitaltechnik und der daraus resultierenden Formierung der Wissenschaftsdisziplin Informatik – als auch die philosophischen Vorstellungen und künstlerische Ästhetik.

Die Auswahl an Themen kann sich daher auch auf die Klarstellung und Definition der Ziele und Zwecke mathematischer Handlungen beziehen (Schorcht, 2018). Die Kombination von Orientierung und dem Wissen über Prozeduren und Konzepte ermöglicht es den Lernenden, nicht nur mathematische Konzepte und Techniken anzuwenden, sondern auch ihre Anwendungen in verschiedenen Situationen zu verstehen und zu bewerten. Mit anderen Worten: Durch das Verständnis der Ziele und Zwecke mathematischer Handlungen können Lernende besser beurteilen, wann und wie sie bestimmte mathematische Techniken oder Konzepte anwenden sollten.[1]

Welche Funktion und Zielsetzung kann Mathematikgeschichte im Mathematikunterricht einnehmen?

In der Literatur besteht ein weitestgehend allgemeiner Konsens darüber, dass Geschichte der Mathematik drei verschiedene Funktionen haben kann, die sich gegenseitig ergänzen und vervollständigen (Barbin, 1997,

[1] Verschiedene Sammelbände und Themenzeitschriften liefern ein vielfältiges Angebot an möglichen Themen für interessierte Leserinnen und Leser. Eine mögliche Auswahl für konkrete Praxisbeispiele liefert unter anderem Kaiser & Nöbauer (1984), Winter (1991), Calinger (1996), Cofman (1999, 2001), Katz & Michalowicz (2005), Biegel, Reich & Sonar (2008), Pengelley et al. (2009), Sriraman (2012), Matthews (2014), Barnett, Lodder & Pengelley (2014), Shell-Gellasch & Thoo (2015), Moyon & Tournès (2018), Lengnink & Schorcht (2019).

2006; Jahnke et al., 2000): „Replacement“, „reorientation“ und „cultural understanding“.

Replacement (franz.: fonction vicariante): Geschichte der Mathematik bietet die Möglichkeit, sich der Mathematik anders zu nähern, d.h. nicht nur ausgehend vom Produkt, sondern sie auch als Prozess zu verstehen. Es werden die Wahrnehmung der Mathematik als eine Sammlung von wohldefinierten und deduktiv organisierten Ergebnissen als auch eine lebendige intellektuelle Aktivität angestrebt. Dies entspricht der oben dargelegten Sinnbildung durch Gegenwartsbezug.

Reorientation (franz.: fonction dépaysante): Bekannte Verfahren und Begriffe werden durch die historische Dimension verfremdet (Artigue, 1990; Barbin et al., 2020; Radford & Santi, 2022). Das Erstaunen, das durch die Fremdartigkeit bekannter mathematischer Begriffe und Verfahren hervorgerufen wird, kann zur Reflexion über das gegenwärtige, eigene mathematische Wissen führen und die damit einhergehende etablierte Form in Frage stellen (Barbin & Tzanakis, 2014). Dies korreliert mit der Auswahl an Themen anhand ihrer Historizität. Insbesondere durch die Analyse von (sorgfältig ausgewählten) Originaltexten und historischen Quellen, wie dies später im vorliegenden Text anhand der Notizen Leibniz‘ demonstriert wird, entstehen solche Fremderfahrungen (Habdank-Eichelsbacher & Jahnke, 1999; Jahnke, 2014).

Cultural understanding (franz.: fonction culturelle): Mathematik findet immer in bestimmten wissenschaftlichen, technologischen und gesellschaftlichen Kontexten statt. Sie entwickelt sich innerhalb einer bestimmten Zeit sowie an einem bestimmten Ort (z. B. Epple, 2000). Damit stehen beim Mathematiklernen nicht nur das Lösen von Problemen und die Beherrschung der formalen Sprache im Fokus, sondern ebenso Fragen der historischen, kulturellen, sozialen und ethischen Bedingungen, was der oben dargelegten Orientierung entspricht. Deutlich wird dies in verschiedenen Ausprägungen der Mathematik in unterschiedlichen vergangenen als auch gegenwärtigen Kulturen (d’Ambrosio, 2018, Heymann, 1996). Da diese kulturelle Funktion immer mit menschlichem Handeln verbunden ist, tritt hier auch indirekt die Berücksichtigung der oben erwähnten Identität auf.

Die Zielsetzung der Mathematikgeschichte im Unterricht kann nach Jankvist (2009a, 2009b) auf zwei grundsätzliche Ziele reduziert werden:

„History-as-a-tool“: Als Werkzeug dient Mathematikgeschichte dem Erlernen von Mathematik. Historische Kontexte werden hierbei zum besseren Verständnis gegenwärtiger Mathematik genutzt.

„History-as-a-goal“: Für Mathematikgeschichte als Lernziel hingegen ist die Verständlichkeit von Mathematik erst dann gegeben, wenn Ziele und Zwecke mathematischen Handelns mitbetrachtet werden. Im Mittelpunkt steht die Mathematik in ihrer Entwicklungsgeschichte. Es sind weder Fakten, Daten oder Methoden auswendig zu lernen, stattdessen soll das Verständnis für den kulturhistorischen Prozess entwickelt werden.

Durch welche Methoden kann Geschichte der Mathematik die pädagogische Praxis unterstützen?

Allgemeinen Zuspruch findet die Beschreibung methodischer Zugänge bei Jankvist (2009a; siehe auch Clark et al., 2018). Diese beruht auf einer Synopse mehrerer Arbeiten, wobei die Arbeit von Toeplitz (1927) sicherlich das älteste und bekannteste Beispiel für eine Unterscheidung verschiedener methodischer Zugänge ist. Toeplitz schlägt eine Einteilung in indirekt- und direkt-genetische Methode vor, wobei die Mathematikgeschichte bei Ersterem nur strukturgebend ist und in Letzterem als Lerngegenstand offen zu Tage tritt. Genaue Ausführungen zum genetischen Prinzip finden sich auch bei Schubring (1978).

Jankvist (2009b) unterteilt die Integrationsmöglichkeiten der Mathematikgeschichte in sogenannte „Illumination approaches“, „Module approaches“ und „History-based approaches“.

Die Mathematikgeschichte kann eingesetzt werden, um mathematische Themen anschaulicher und interessanter zu gestalten. Dieser Ansatz wird als **„Illumination approach“** bezeichnet. Lehren und Lernen von Mathematik wird hierbei durch Anekdoten, Erzählungen, Geschichten und Kommentare angereichert. Die Bandbreite dieser mathematikhistorischen Beispiele ist groß: Auf der einen Seite gibt es „Historical snippets“ (Tzanakis et al., 2000, S. 214). Das sind kurze Informationen, die zum Beispiel in der Randspalte eines Lehrbuchs oder Arbeitsblatts platziert werden können. Auf der anderen Seite stehen ausführlichere Infokästen. Sie enthalten längere Erzählungen, etwa über bedeutende Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte oder interessante historische Begebenheiten. „Illumination approaches“ nutzen die Mathematikgeschichte also gezielt als didaktisches Hilfsmittel. Sie sollen den

Mathematikunterricht anschaulicher, abwechslungsreicher und motivierender machen.

Durch **„Module approaches“** entstehen hingegen ganze Sinneinheiten von Unterricht, die mathematikhistorische Themen ausführlich untersuchen und in einigen Fällen mit originalen Quellen anreichern. Beispiele erstrecken sich von Themenseiten zu den römischen Zahlzeichen bis hin zu ganzen Kapiteln oder sogar Schulbüchern, die die Entwicklung der Bruchzahlen oder Mathematik als Ganzes in den Blick nehmen. Das im Beitrag ausgeführte Beispiel zu der Leibniz‘schen Zerfällungstafel ist dieser Methode zuzuordnen. Typisch für diese Methode ist deren zeitliche Ausdehnung im Unterrichtsverlauf über mehrere Stunden hinweg.

Mit den **„History-based approaches“** wird die mathematikhistorische Entwicklung nicht offen diskutiert, sondern dient vielmehr der Strukturierung des mathematischen Inhalts. Der genetische Aufbau des Unterrichts wird somit historisch-genetisch strukturiert. Diese Methode wurde ausführlich zu Beginn des 20. Jahrhunderts diskutiert (Poincaré, 1914/ 1973; Toeplitz, 1927; Klein, 1924; siehe auch Jahnke, Jankvist & Kjeldsen, 2022). Sie wurde und wird zum Teil kritisch gesehen, weil sie die Entwicklungsgeschichte der Menschheit mit der individuellen, mathematischen Verständnisentwicklung der Lernenden gleichzusetzen versucht (Pringsheim, 1898; Lange, 1912; Schwager, 1958; Schubring, 1978; Schubring et al., 2000).

Welche Wirksamkeit besitzt Mathematikgeschichte im Unterricht?

Verschiedene empirische Arbeiten zur Wirksamkeit der Integration mathematikhistorischer Zugänge werden bei Jankvist (2007, 2011, 2012), Barbin (2018), Katz & Tzanakis, (2011), sowie Chorlay, Clark & Tzanakis (2022) dargelegt. Trotz dieser durchdachten und sorgfältig durchgeführten empirischen Untersuchungen ist die Wirksamkeit der Umsetzung mathematikhistorischer Beispiele in der wissenschaftlichen Diskussion noch offen und es besteht weiterhin erheblicher Forschungsbedarf. Dies liegt zum Teil an komplexen, unterschiedlichen Voraussetzungen, die einen Vergleich der Studien erschweren. Dazu gehören, so Clark et al. (2018), unterschiedliche Vorstellungen und Überzeugungen der Lernenden und Lehrenden über Mathematikgeschichte (Schorcht & Buchholtz, 2015; Buchholtz & Schorcht, 2014, 2016, 2019), unterschiedliche Ausbildungsniveaus der

Lehrkräfte bezüglich der Mathematikgeschichte und ihres Einsatzes im Mathematikunterricht (Schorcht, 2015), sowie beispielsweise fehlende inhaltliche Ausgestaltungen in den Lehrplänen und die damit verbundenen Herausforderungen für Lehrkräfte bezüglich der Integration historischer Aspekte im Verlauf des Mathematikunterrichts. Das Schließen dieser Forschungslücken wird besonders im internationalen Forschungsraum durch die HPM-Community vorangetrieben.

3. Fokussierung

Da Partitionen ein Teilgebiet der Kombinatorik sind, orientiert sich der folgende historische Überblick inhaltlich an der Kombinatorik als heuristische Abzählstrategie. Fragen hierzu können schon im Anfangsunterricht bei der Zahlzerlegung auftauchen: Wie kann die Zerlegung von Zahlen systematisch erfasst werden? Haben die Menschen die Zerlegung von Zahlen schon immer so durchgeführt? Wer hat die Zerlegung von Zahlen erfunden? Zur Beantwortung dieser Fragen folgt deswegen ein historisch-asynchron angelegter Streifzug durch die Kombinatorik, der schließlich bei Partitionen von Summen (Zahlzerlegung) im Sinne von „Wie sind wir hier gelandet?“ mündet (Heritage).

Mathematikhistorische Sachanalyse des Gegenstands

Partitionen als Teil der Kombinatorik sind hauptsächlich erst seit dem 17. Jahrhundert Untersuchungsgegenstand Gelehrter wie Leibniz oder Euler (Dieudonné, 1985). Die Suche nach der Anzahl aller Kombinationsmöglichkeiten verschiedener Elemente reicht dagegen bis in die Antike (einen Überblick bieten Knobloch, 1973 & Knuth, 2013). Einen der frühsten Nachweise liefert Aristoteles, der schon die vier Elemente Wasser, Luft, Erde und Feuer in seiner Vier-Elemente-Lehre als Kombination von aktiven Qualitäten – Wärme und Kälte – und passiven Qualitäten – Trockenheit und Feuchtigkeit – beschrieb (Aristoteles, 1540, 2011; Knobloch, 1973; Weyer, 2018).

Die Frage Aristoteles‘ nach der Kombination der vier Elemente taucht im Laufe der Geschichte immer wieder in den kombinatorischen Überlegungen späterer Gelehrter und Mathematiker auf. So lassen sich Belege dafür bei Cardano (1550; 1553/1961), Clavius (1608), Mersenne (1625/1969) und schließlich auch bei Leibniz (1666) in seiner *Dissertatio de arte combinatoria* (kurz: *ars combinatoria)* finden, in welcher er sich unter anderem auch den Partitionen widmet. Die Entwicklung der Kombinatorik haben nach Aristoteles mehrere Gelehrte vorangetrieben, indem sie nach Lösungen zur Beantwortung spezifischer kombinatorischer Fragen suchten (u.a. Pacioli, 1494; Tartaglia, 1556; Cardano, 1550,1553/1961; Buteo, 1559; Mersenne, 1625/1969, 1627; Pascal, 1665; Leibniz 1666; Wallis, 1685; Bernoulli, 1713, Hindenburg, 1776).[2]

Die erste Beschäftigung speziell mit Partitionen im Sinne der Verteilung von Elementen auf Teilmengen lässt sich u.a. in Japan um 1500 entdecken. Dort veranstalteten Gastgeber ein Spiel, bei dem im Laufe des Abends fünf Räucherstäbchen angezündet wurden und die Gäste herausfinden sollten, welche Stäbchen identisch waren. Die Auflistung aller Möglichkeiten geschah damals als Verbindung von Strichen (Knuth, 2013).

Durch seine algebraischen Studien entdeckte Stirling 1730 die Formel zur Ermittlung aller Möglichkeiten, um eine bestimmte Anzahl von Elementen auf k Teilmengen aufzuteilen (Stirling, 1730). Spätere Mathematiker nutzten diese dann im kombinatorischen Kontext (Knobloch, 2013). Auch Leibniz hatte sich zuvor mit der Aufteilung von Elementen in zwei bis drei Teilmengen beschäftigt, jedoch ohne eine allgemeine Formel ableiten zu können (Knuth, 2013).

Anfang des 17. Jahrhunderts begann zudem die Erforschung von Partitionen im Sinne von Zerlegungen ganzer Zahlen in ihre Summanden. So beschäftigte sich vor Leibniz Mersenne schon 1636 im Kapitel *Traitez de la voix et des chants* des Werks *Harmonie universelle* mit der Zerlegung der Zahl Neun und nutzte diese Zerlegungen, um alle möglichen Gesangskombinationen aus neun Noten mittels Multinomialkoeffizient zu ermitteln (Mersenne, 1636). Auch in den Jahren nach der *Ars combinatoria* (1666) beschäftigte sich Leibniz mit Partitionen – unter anderem in seiner *Regula discerptionum et triscerptioum universalis* von 1672 (Rinner, 2024). Die Ableitung einer allgemeinen Regel oder gültigen Formel gelang ihm aufgrund von Fehlern und Irrtümern in seinen Aufzeichnungen nicht (Knobloch, 1976). So vergaß er unter anderem bei der Zerlegung zur Zahl sieben zwei Partitionen und ging somit von insgesamt 13 statt 15 Partitionen aus (siehe auch Abb. 1.; Rinner, 2024). Nichtsdestotrotz gilt Leibniz als einer

[2] Eine Übersicht lässt sich in Cantor (1899, 1901, 1903) und in Knobloch (1973) finden.

der ersten, der sich intensiv mit Partitionen beschäftigte (Andrews, 2013). Ihm folgte Abraham de Moivre, der in seiner Abhandlung *A method of raising an infinite multinomial to any given power or extracting any given root of the same (1697)* unter anderen ein Vorgehen zur Zahlzerlegung am Beispiel der Zahl Sechs mit Hilfe einer Koeffizientengleichung zeigte (de Moivre, 1697). Der Mathematiker de Montmort beschäftigte sich 1708 mit Fragen zur Wahrscheinlichkeit sowie zur Kombinatorik und ging dabei unter anderem auf die Werke von Pascal, de Meré, Fermat und Bernoulli[3] ein. Am Beispiel eines Würfelspiels listete er in seiner Arbeit die Anzahl aller möglichen Partitionen bis zur Zahl 54 mit bis zu neun Summanden im Zahlenraum von eins bis sechs auf (Montmort, 1708). Bernoulli hatte sich ebenfalls am Würfelproblem der Zerlegung mit bis zu sechs Summanden im Zahlenraum eins bis sechs gewidmet (1713).

Mit dem Partitionstheorem zur Identität bestimmter Partitionen (1748) und dem Pentagonalzahlensatz gelangen Euler erste tiefgreifende Entdeckungen (Andrews, 2013; Jacobs, 1983). Franklin bewies schließlich 1881 Eulers Partitionstheorem mit Hilfe der Darstellung von Partitionen als Punktebilder (Ostmann, 1956; Jacobs, 1983; Bessenrodt & Pak, 2004). Er war ein Student Sylvesters, der Partitionen ebenfalls als Punktebilder abbildete (1882) und durch die Generalisierung des Partitionstheorems Eulers ein weiteres Identitätstheorem entdeckte (Andrews, 2013).

Anfang des 20. Jahrhunderts trugen Hardy, Ramanujan, MacMahon, Rogers und Rademacher maßgeblich dazu bei, die Erkenntnisse Eulers fortzuführen und entdeckten weitere Identitäten, konvergente und asymptotische Reihen sowie Generierungsfunktionen (Andrews 2013; Knuth 2013; Ostmann, 1956; Alder, 1969).

Die Zerfällungstafel nach Leibniz

---

[3] Bernoulli *ars conjectandi* erschien erst 1713. Bernoulli hatte sie zu Lebzeiten geschrieben und war zu dem Zeitpunkt seit acht Jahren verstorben. Sein Neffe Nicolaus Bernoulli veröffentlichte sie schließlich.

Für Leibniz waren Partitionen eines der Hauptproblemfelder der Kombinatorik. Unter anderem versuchte er in seiner *Dissertatio de arte combinatoria* (1666) zwei Probleme der Mathematik zu lösen:

1. alle Kombinationen (Zerfällungen), bei einer gegebenen Zahl und der Teile (Summanden), in die sie zerlegt werden soll, zu finden,
2. die Kombination (Zerfällung) zu finden, aus der sich alle anderen ableiten lassen.

Zur Ermittlung aller möglichen Zerlegungen von Zahlen nutzte Leibniz eine grafisch-symbolische Darstellung (Abb. 1), die vom Aufbau her an eine Tabelle erinnert. Diese Tafeln konnten in späteren Berechnungen genutzt werden und dienten als Wissensspeicher.

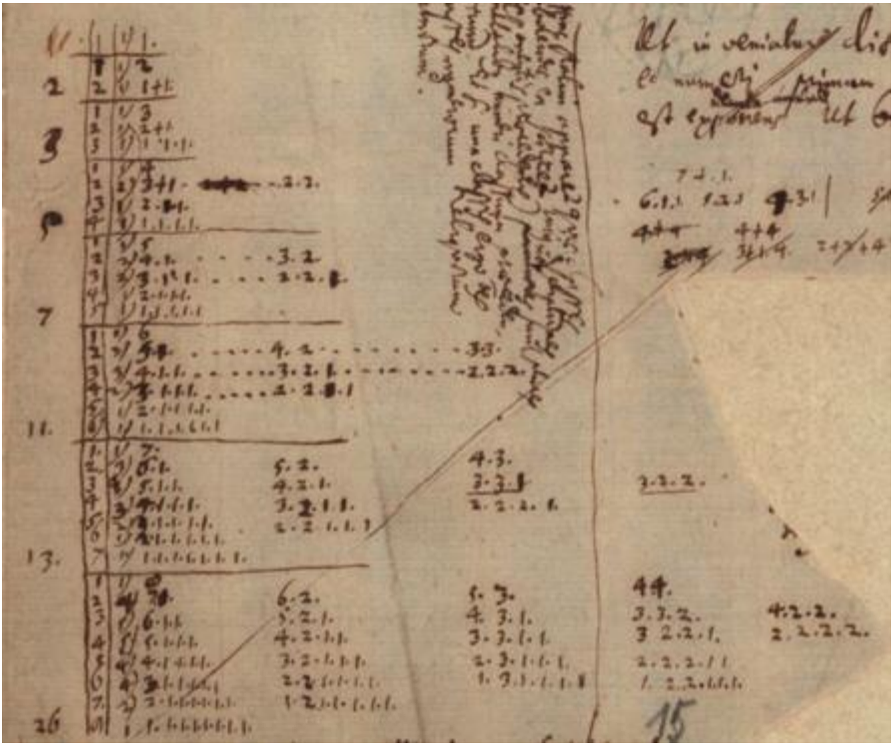


Abbildung 1: Tafel (Tabelle) der Zerfällungen (Zerlegungen) der Zahlen Eins bis Acht aus der Leibniz'schen *Regula discerptionum et triscerptionum universalis* (Rinner, 2024).

Tafeln waren laut Knobloch (1973) besonders im 17./18. Jahrhundert üblich, um Lösungen für mathematische Probleme zu entwickeln (z. B. auch das Pascal'sche Dreieck). Die Tafel aus Abbildung 1 stammt aus dem Werk *Regula discerptionum et triserptionum universalis* von 1672. Eine ausführliche Analyse dieser Tafel aus mathematikhistorischer Perspektive findet sich in Rinner (2024).

Sichtbar sind von oben nach unten die Zerfällungen der Zahlen Eins bis Acht, abgetrennt durch einen horizontalen Strich. Vor jedem dadurch getrennten Abschnitt befindet sich die Angabe der Anzahl aller möglichen Zerfällungen einer Zahl (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 26). In den Abschnitten listet Leibniz in jeder Zeile von oben nach unten Zerfällungen mit einem Summanden (bspw. der Zahl Fünf), mit zwei Summanden (bspw. 4+1 und 3+2), mit drei Summanden (bspw. 3+1+1 und 2+2+1), usw. auf. Die Anzahl der möglichen Zerfällungen je Zeile hält er in der zweiten Spalte fest (bspw. für die Zahl Fünf von oben nach unten die „1)", „2)", „2)", „1)", „1)"). Aufgrund der Kommutativität der Addition spielt die Reihenfolge der Summanden für Leibniz keine Rolle. Zur Ermittlung aller Zerfällungen verfolgte Leibniz verschiedene Prinzipien. So verringerte er zunächst innerhalb einer Zeile den ersten Summanden um eins und erhöhte den zweiten um eins. Wenn sich damit keine neuen Zerlegungen generieren ließen, verringerte er abermals bei der ersten Zerlegung in der Zeile den ersten Summanden und ergänzte einen weiteren in der nächsten Zeile. Danach folgte er wieder seiner ersten Strategie. Bei der Zerlegung zur Zahl Sieben sind bei der Zeile mit drei Summanden zwei Zerfällungen unterstrichen. Laut Rinner (2024) unterstrich Leibniz diese, da die bisher durchgeführten Prinzipien zur Ermittlung neuer Zerlegungen nicht genutzt werden konnten und ein neues Prinzip angewandt werden musste (Verringerung des zweiten Summanden). Zusätzlich fällt auf, dass Leibniz in der letzten Zeile zur Zerfällung der Zahl Drei das Additionszeichen durch einen Punkt ersetzte.

Der Einsatz der Leibniz'schen Zerfällungstafeln im Mathematikunterricht der Grundschule

Entlang der Ziele Gegenwartsbezug, Historizität, Identität und Orientierung soll die Leibniz'sche Zerfällungstafel für eine Integration im Mathematikunterricht zur Kombinatorik bzw. Zahlzerlegung im Sinne der Module-approaches-Methode (vgl. Kapitel 2) fruchtbar gemacht werden. Die Nutzung dieses mathematikhistorischen Beispiels soll zum Verständnis der Zahlzerlegung und deren Notationsformen im Anfangsunterricht beitragen, sowie im späteren Grundschulunterricht das Verständnis und die Bedeutung heuristischer Strategien und Hilfsmittel stärken. Neben der Integration der Zerfällungstafel kann für Kinder mit visuellen Einschränkungen auch ein Hörspiel genutzt werden, in dem Leibniz den Umgang mit Zerfällungen erklärt und die Tafel beschreibt. Zur besseren Übersichtlichkeit für Kinder empfiehlt es sich, die Tafel zu kürzen, sodass beispielsweise nur die Zerlegung bis einschließlich zur Zahl Sechs sichtbar ist (siehe Abb. 1). Im Folgenden wird auf diese gekürzte Form der Tafel Bezug genommen.

Sinnbildung durch Gegenwartsbezug – Die Entwicklung eines Verständnisses für den mathematischen Wandel im historischen Verlauf mit der Gegenwart als Bezugspunkt ist von den Fragen der Lernenden bestimmt. Aus gegenwärtigen Problemstellungen zur Zahlzerlegung oder der Kombinatorik können Fragen an die Mathematikgeschichte gestellt werden. Mögliche Additionsaufgaben zur Zahlzerlegung mit zwei Summanden können beispielsweise gemeinsam an der Tafel gesammelt werden. Daran schließt sich die folgende Aufgabe an: *„Finde Additionsaufgaben mit der Summe Sechs und drei Summanden.“* In der Reflexionsphase kann die Notwendigkeit einer Systematik thematisiert werden, um alle Möglichkeiten zu finden. Wie können die gefundenen Additionsaufgaben sinnvoll geordnet werden? Welche Ideen haben andere Personen dazu? Wie kann die Anzahl der Additionsaufgaben (Zerfällungen) zu den verschiedenen Zahlen bestimmt werden? Somit ist eine Überleitung zu Leibniz und seinen Zerfällungstafeln geschaffen, der mit Hilfe dieser ein systematisches Konzept zum Finden aller Zerfällungen schaffen wollte.

Historizität – An Leibniz‘ Beispiel wird auch erfahrbar, dass sich Mathematik – hier besonders die Art der Darstellung – im Laufe der Zeit verändert hat. Diese Alteritätserfahrung kann Ausgangspunkt für die Beschäftigung mit Leibniz‘ Notizen sein. Hierzu wird die Notiz von Leibniz in die nächste Unterrichtsstunde mitgebracht und die Lernenden erkunden Bekanntes sowie Unbekanntes gemeinsam. Mit diesem Impuls steigen die Lernenden in die Zerfällungsdarstellung von Leibniz ein. Sie aktivieren ihr Vorwissen und versuchen die Zahlzeichen in Leibniz‘ Notizen zu lesen. Dabei wird ein breites Leistungsspektrum angesprochen, weil jede und jeder in der Klasse einen Beitrag leisten kann. Zunächst fällt beispielsweise auch nur das bräunliche Kolorit der

Notizen oder die unleserliche Handschrift auf. Mit dem Impuls „*Findet ihr in seinen Notizen die Zerlegungen der Zahl 5 und 6?*“ wird die Aufmerksamkeit auf die Mathematik gelenkt. Die Ziffern 1, 4 und 7 entsprechen nicht der gegenwärtigen Notationsweise. Zudem kennen die Lernenden möglicherweise Zahlzerlegung aus dem Anfangsunterricht nur in Form von Zerlegungshäusern oder -bäumen und nicht in einer freien, strukturierten Form. Außerdem verbindet Leibniz die einzelnen Summanden mit fortschreitender Größe der Tafel nicht mehr durch Additionszeichen miteinander, sondern trennt diese durch Punkte. Die erste Zeile einer jeden Zerfällung mit einer Zahl n listet Leibniz mit der Zahl selbst auf und gibt dort als Anzahl an Zerlegungen ‚1‘ an. Auch dies ist heutzutage untypisch, es handelt sich hier um keine Additionsaufgabe – maximal um eine Zerlegung mit der Zahl Null. Die Zahl Null betrachtet Leibniz aber nicht in seinen Ausführungen.

Identität – Das heutige Wissen darüber, wie man effektiv eine Zahl n in zwei bis n Summanden zerlegen kann, und die daraus entstandene Rekursionsformel gehen unter anderem auf die zuvor genannten Persönlichkeiten (Mersenne, Leibniz, Pascal u. v. m.) zurück. Die Kinder können im Beispiel erfahren, womit Leibniz sich beschäftigt hat und dass auch er sich, so wie die Lernenden im Anfangs- und Mathematikunterricht, mit der Zahlzerlegung und geeigneten Strategien sowie Darstellungsformen auseinandergesetzt hat. Zudem ist eine räumliche Verortung der Zahlzerlegung im damaligen Europa möglich, um identitätsstiftend ein kulturelles Verständnis aufzubauen. Hierzu können die Wirkungskreise und -räume der jeweiligen Personen fachübergreifend thematisiert werden.

Orientierung – Für Leibniz war das Finden aller möglichen Partitionen ein Spiel mit der Mathematik. Kinder erfahren hierbei, dass Mathematik auch zum Zeitvertreib betrieben wurde und wird. Sie bedient die intellektuelle Neugier und die Freude am Denken. Das Finden aller Zerfällungen zu einer Zahl versuchte Leibniz über Strukturen und Zahlbeziehungen herzuleiten. Der Bereich „Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang“ innerhalb inhaltsbezogener Kompetenzen steht bei dieser Aufgabe in engem Zusammenhang mit den Partitionen. Für die Ermittlung dieser erstellte Leibniz regelgeleitet mehrere Tafeln. Tafeln waren in der frühen Mathematik Mittel des Erkenntnisprozesses. Durch sie konnte Leibniz die aufgestellten Prinzipien zur Ermittlung aller Zerfällungen anwenden und neue Prinzipien generieren. Die Tafeln ermöglichten es, einer Struktur zu folgen und diese bei Notwendigkeit anzupassen (Rinner, 2024). Diese spannende Suche einer passenden Ordnung, um alle Zerfällungen der Zahlen bis zehn zu finden, kann im Unterricht Thema sein. So sind beispielsweise die Kinder dazu aufgefordert, in Partnerarbeit die folgende Aufgabe zu bearbeiten: *„Überlege zusammen mit deiner Partnerin/ deinem Partner. Was bedeuten die Zahlen in der Tabelle?“* In einem hermeneutischen Prozess (Kurt, 2004; Glaubitz, 2011) nähern sich die Lernenden dem mathematischen Inhalt der Notizen an. Dies gelingt nicht allen, aber jedes Kind kann auf seinem Leistungsniveau Zahlen entdecken, Summen identifizieren, die Anzahl an Summen finden und auch Systematiken erkennen. In der gemeinsamen Sammlung dieser Teilergebnisse kann die Klasse im Verband der Bedeutung der Notizen näherkommen und eventuell eigene Fragen zur Zahlzerlegung beantworten: „*Wie können Additionsaufgaben sinnvoll geordnet werden, damit man sicher sein kann, dass alle Zerlegungen gefunden wurden?“* Zur Interpretation der Notizen können zusätzliche inhaltsorientiert-strategische Hilfen in Form von Fragen an die Kinder zur Verfügung gestellt werden, die die Kinder beim Erkennen des Aufbaus der Tafel unterstützen sollen. Beispiele für solche Fragen sind: Wo siehst du die Zahl, die zerlegt wurde? Wofür stehen die Punkte zwischen den Zahlen in der zweiten Spalte? Wofür steht die Zahl in der ersten Spalte Wofür steht die erste Zahl in der zweiten Spalte? Wofür stehen die Zahlen ganz links?

Dabei sollen die Kinder erkennen, dass

- in jedem der sechs Abschnitte der Tabelle von oben nach unten eine Zahl zerlegt wird, begonnen bei der Eins bis zur Sechs;
- die zu zerlegende Zahl immer in der ersten Zeile der letzten Spalte eines jeden Abschnitts steht;
- die Summanden mit Punkten – statt mit Additionszeichen – voneinander getrennt sind;
- die Zahl in der ersten Spalte die Anzahl der Summanden angibt, in die die Zahl zerlegt werden soll;
- die Zahl vor den Zerlegungen in der zweiten Spalte die Anzahl der Zerlegungen angibt;
- die Zahl ganz links die Anzahl aller Zerlegungen zu einer gegebenen Zahl.

Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler kann die Tabelle auch fortgesetzt werden: *„Wie hätte Leibniz die Zerlegung der Zahl 7 aufgeschrieben? Setzt seine Tabelle fort.“* Ziel der Aufgabe ist es, dass sich die Lernenden zunehmend mit einer anderen Form der Darstellung zur Zahlzerlegung vertraut machen und Leibniz‘ Vorgehen zur Generierung aller Partitionen nachvollziehen.

Durch die Auseinandersetzungen mit den Überlegungen Leibniz‘, wie alle Zahlzerlegungen ermittelt werden könnten, bietet dieses Unterrichtsbeispiel die Gelegenheit, Mathematik als Prozess wahrzunehmen (Replacement). Ebenso wird das den Kindern aus dem Anfangsunterricht bekannte Verfahren der Zahlzerlegung durch die Leibniz‘sche Zerfällungstafel verfremdet und bietet Reflexionsmöglichkeiten über damalige und heutige Notationsformen zur Zahlzerlegung (Reorientation).

Anhand der vorangegangenen Überlegungen zur Umsetzung der bildungstheoretischen Ziele Sinnbildung durch Gegenwartsbezug, Historizität, Identität und Orientierung wurden Arbeitsmaterialien für den Anfangs- und auch den späteren Mathematikunterricht der Grundschule entwickelt. Notwendige Lernvoraussetzungen, um die Leibniz‘sche Zerfällungstafel hinsichtlich der bildungstheoretischen Ziele im Unterricht einzusetzen, sind:

- aufgebautes Zahlenverständnis im Zahlenraum bis zwanzig (darunter zählt hier auch das Benennen und Schreiben der Ziffern sowie die Mengenvorstellung)
- erste Erfahrungen im Zerlegen der Zahlen bis zehn in mindestens zwei Summanden

4. Fallbeispiel Melina

Leibniz‘ Problem wurde im Enrichment-Programm „Mathe für Cracks“ für mathematisch interessierte Kinder der 3.–5. Klasse an der TU Dresden eingesetzt. Die Aufgabe war eine Möglichkeit unter vielen, die den Lernenden zur Beschäftigung mit der Mathematikgeschichte zur Verfügung standen. Zunächst sollten die Kinder möglichst viele Additionsaufgaben mit der Summe 6 (ohne den Summanden 0) finden, ihr Vorgehen dabei beschreiben und mit Hilfe eigener Begründungen einschätzen, ob sie alle Additionsaufgaben gefunden haben. Mit dieser

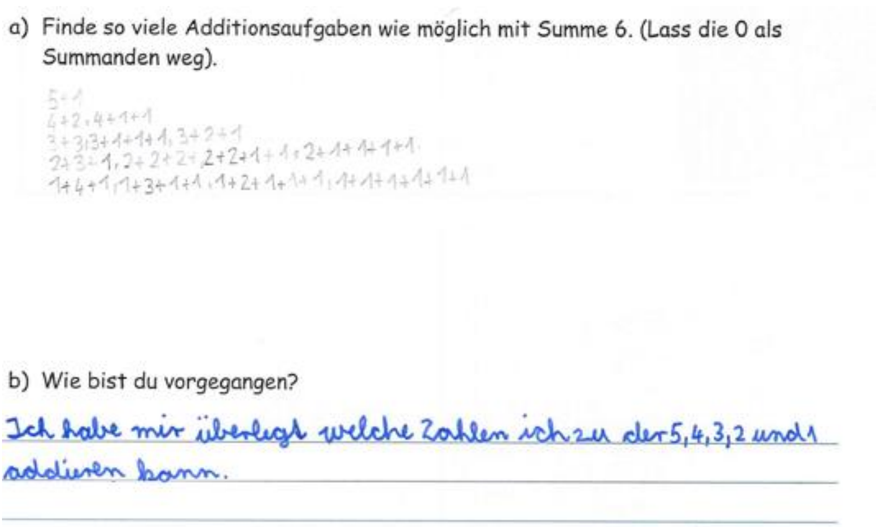
Einstiegsaufgabe wird an das Vorwissen der Kinder angeknüpft. Sie legt den Grundstein für die weitere Beschäftigung mit der Leibniz'schen Zerfällungstafel und soll Sinnbildung durch Gegenwartsbezug ermöglichen (vgl. Kapitel 2). Im Anschluss erhielten die Lernenden sowohl einen kurzen Informationstext über Leibniz und seine Beschäftigung mit den Zahlzerlegungen als auch einen Ausschnitt der Leibniz'schen Zerfällungstafel (siehe Abb. 1), der über den Zerlegungen zur Zahl Sieben endet (Identität). Bezugnehmend zur ersten Aufgabe sollten die Kinder nun die Zahlzerlegung zur 6 in seinen Notizen finden (Historizität) und sein Vorgehen beschreiben (Orientierung). Abschließend sollten Leibniz' Überlegungen fortgesetzt werden, indem in seiner Notationsform die Zahl Sieben zerlegt wird (Sinnbildung durch Gegenwartsbezug, Historizität & Orientierung).

Sechs Kinder widmeten sich diesen Aufgaben – vier in Einzel- und zwei in Partnerarbeit. Davon waren vier Kinder in der dritten Klasse und zwei Kinder in der vierten Klasse. Die Bearbeitung der Aufgabe wurde bei fünf der sechs Kinder von einer Studentin begleitet. Sie gab Hilfestellungen, wenn die Kinder die Aufgabe nicht verstanden oder Probleme beim Lösen hatten. Weiterhin forderte sie die Kinder auf, ihr Vorgehen verbal zu beschreiben, wenn die Kinder zu Teilaufgaben wenig oder gar nichts geschrieben hatten. Die Bearbeitungsschritte der Kinder wurden zu Forschungszwecken videografiert und die Gespräche mit der Studentin transkribiert.

Im Folgenden wird eine Fallbeschreibung einer Aufgabenbearbeitung vorgenommen. Dabei werden die schriftlichen Daten auf dem Arbeitsblatt mit den verbalen Äußerungen aus dem Transkript angereichert, um einen Einblick in Überlegungen zu diesem historischen Mathematikbeispiel zu bekommen.

Mittels qualitativer strukturierender Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) wurden bei der Interpretation der Arbeitsblätter und der Transkripte Fundstellen für die vier Kategorien Gegenwartsbezug, Historizität, Identität und Orientierung deduktiv expliziert. Das Fallbeispiel von Melina zeigt in besonderer Weise, wie Kinder durch die Beschäftigung mit mathematikhistorischen Beispielen erkennen können, dass diese einem Entwicklungsprozess unterliegen (Historizität), bis in die heutige Zeit relevante mathematische Probleme aufgreifen (Sinnbildung durch Gegenwartsbezug), von Personen geprägt waren (Identität) und einen bestimmten Sinn und Zweck verfolgten (Orientierung).

Melina ist zehn Jahre alt und besucht die vierte Klasse einer städtischen Grundschule. Melina sollte zunächst möglichst viele Additionsaufgaben mit der Summe Sechs finden (Abb. 2).


a) Finde so viele Additionsaufgaben wie möglich mit Summe 6. (Lass die 0 als Summanden weg).

5+1
4+2, 4+1+1
3+3, 3+1+1+1, 3+2+1
2+3+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1
1+4+1, 1+3+1+1, 1+2+1+1+1, 1+1+1+1+1+1

b) Wie bist du vorgegangen?

Ich habe mir überlegt welche Zahlen ich zu der 5,4,3,2 und 1 addieren kann.

Abbildung 2: Melinas Lösung der Aufgabenteile a und b zur Zerlegung der Zahl Sechs in Summen mit mehreren Summanden.

Sie geht dabei systematisch vor und findet die Zerlegungen in den oberen drei Zeilen selbstständig, indem sie den ersten Summanden um 1 vermindert und den zweiten um 1 erhöht. Anschließend zerlegt sie den zweiten Summanden. Nach den ersten drei Zeilen endet sie mit den Worten: `es gibt sechs.` Erst nach dem Hinweis, dass es noch mehr Möglichkeiten gibt, findet Melina die übrigen notierten Zahlzerlegungen. Dabei bleibt sie bei ihrem Vorgehen, vermindert den ersten Summanden um 1, erhöht aber nicht den zweiten, sondern beginnt eine dreigliedrige Zerlegung, wobei sie den ersten Summanden stets unverändert lässt. Auf die Frage, wie viele Zerlegungen sie gefunden hat, zählt sie diese einzeln ab und kommt auf 13 (wobei 14 notiert wurden). Nach einem weiteren Hinweis, dass Melina Zerlegungen doppelt notiert hat (in verschiedenen Reihenfolgen), überlegt Melina kurz und sagt dann: `es sind zehn.` Die Beschreibung ihres eigenen Vorgehens sowie die Begründung, ob sie alle

Zerlegungen gefunden hat, fallen sehr kurz aus. Zwar wird bei b) sichtbar, dass sie in ihren Überlegungen bei der Zahl Fünf gestartet ist und dann rückwärts bis zur Eins die ersten Summanden festgelegt hat, aber nicht, wie sie die anderen Glieder der Zerlegungen gefunden hat. Auch verbal äußert sie während der Bearbeitung keine andere Erklärung:

`also als erstes habe ich alle zahlen die ich mit der fünf addieren kann (.) das ist dann die eins (.) mit der vier habe ich dann die zwei dann konnte ich noch die vier und zwei einsen (.) bei der drei konnte ich die (.) drei ich könnte noch mehr bei der vier da könnte ich (.) nein nein (.) bei der drei könnte ich dann noch einmal die drei dann könnte ich drei und die zwei und eine eins und dann noch drei einsen (.) bei der zwei habe ich dann die drei und die eins dann habe ich die zwei die zwei und die zwei (.) dann habe ich die zwei die zwei und die eins`

Obwohl ihre Begründung mathematische Erklärungsansätze offenlässt, ist sie sicher, alle Lösungen gefunden zu haben:

`ich glaube es kann keine möglichkeiten mehr sein weil ich jetzt schon alle möglichkeiten (.) mir aufgeschrieben habe (.) also ich kann das nicht begründen`

Im Anschluss erfolgt die Auseinandersetzung mit Leibniz‘ Beispiel (Abb. 3). Melina identifiziert die Zerlegung zur Zahl Sechs innerhalb kürzester Zeit und begründet ihre Entscheidung:

`weil es hier eine sechs stand [Melina zeigt auf die 6 in der ersten Zeile der Zerlegung zur 6] und weil es hier sechs teilen gab wo der jeweils etwas hingeschrieben hat [Melina zeigt zusätzlich mit Bleistift auf Lösung]`

Sie erkennt in Leibniz‘ Aufzeichnungen, dass in jeder Zeile einer Partition die Zahl Sechs in mehrere Summanden zerlegt wird und er von oben nach unten die ersten Summanden sukzessiv kleiner werden lässt. Sie fokussiert sich somit auf die zweite Spalte und ausschließlich auf die möglichen Zerlegungen. Dadurch kann sie die entsprechende Zeile identifizieren. Die für sie ungewohnte Notation (als Tabelle, mit Punkten zwischen den Summanden usw.) hindert sie nicht daran, eine korrekte Antwort zu finden und diese auch zu begründen.

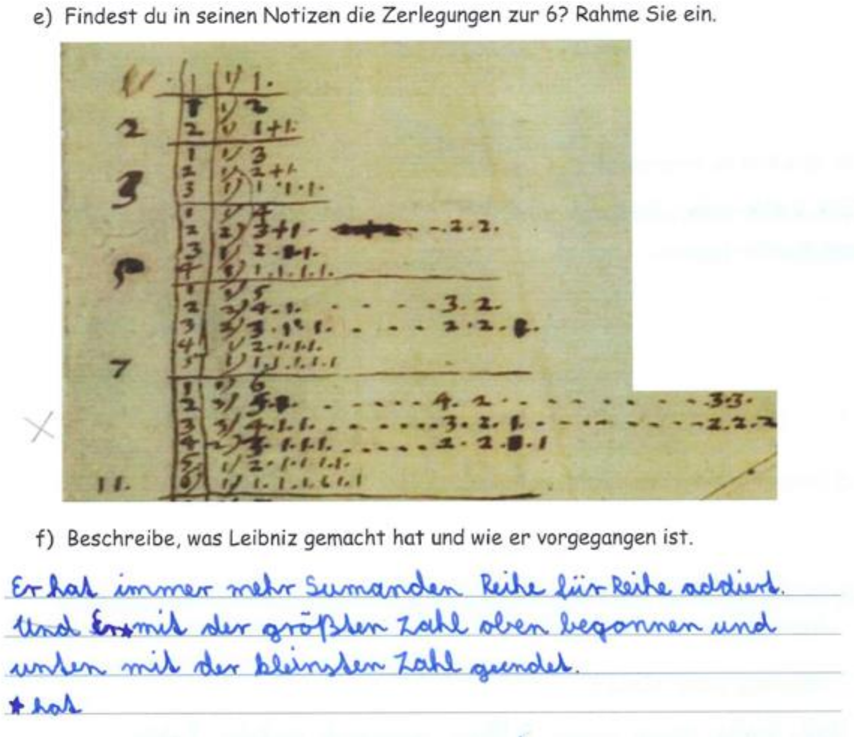


Abbildung 3: Melinas Beschreibung zu Leibniz‘ Zerfällungen.

Als sie jedoch die letzte Aufgabe bearbeitet, fragt sie Folgendes:

`ich habe noch mal eine frage (.) warum hat der hier immer so punkte ausgelassen [Melina zeigt mit dem linken Zeigefinger auf das Blatt] also punkte hingeschrieben`

und

`was hat er >hier hingeschrieben [Melina zeigt in der letzten Spalte auf die erste Zahl vor der Klammer].`

Die Studentin erklärt, dass Leibniz Punkte statt des üblichen Additionszeichens verwendet hat und weist sie bei den Zahlen vor der Klammer auf die Anzahl der Zerlegungen in einer Zeile hin.

Auch drei der anderen fünf Kinder notierten unter f, dass in jeder Zeile ein weiterer Summand hinzukommt. Eines dieser Kinder ergänzte außerdem, dass *‚in jeder Zeile eine Zahl verkleinert wird‘*. Das fehlende Notationszeichen sowie das Mitzählen der Zerlegung zur Zahl selbst wird noch zusätzlich von der zweiten Gruppe in Partnerarbeit thematisiert. Alle anderen zeigen keine Irritationen hinsichtlich Art und Weise der Notation, dem fehlende Additionszeichen, der Nummerierung der Summanden und der zeilenweisen Zählung der Terme.

Melina beginnt anschließend, die Ziffern Eins bis Sieben untereinander zu schreiben und verlängert dann die Linien zwischen den einzelnen Spalten. Im Anschluss geht sie Zeile für Zeile vor. Auch wenn Melina in Abbildung 3 verstanden zu haben scheint, dass mit jeder Reihe die Zerlegungen einen Summanden mehr enthalten, irritiert sie das bei der Umsetzung und fragt zur Notation der Zerlegung der Zahl Sechs:

```
vier plus drei (11) [Melina radiert und beendet die zweite Zeile] warum hat der eigentlich nur das zu der drei geschrieben also das ist nur drei plus drei also drei plus drei hätte er noch schreiben können (4) drei (.) nein warum ich verstehe das nicht (.) ach so er hat drei hier unten da drei zwei eins hingeschrieben#
```

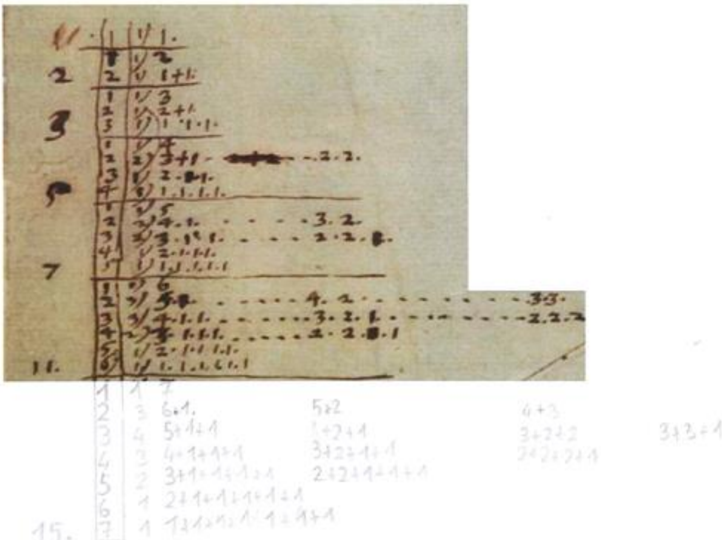


Abbildung 4: Melinas Ergänzungen zu Leibniz‘ Notizen.

Mit Unterstützung findet sie dann alle Zerlegungen. Die Studentin macht Melina noch auf die Zahl unten links zu jeder Partition aufmerksam und fragt nach deren Bedeutung. Melina antwortet:

`wie viele es insgesamt sind also wie viele möglichkeiten es gibt`

und fragt im Anschluss die Studentin, ob die oberste Zeile mitgezählt wird

`soll ich die eine hier oben auch mitzählen`

Am Ende zählt sie diese mit und notiert „15.“.

Auch zwei weiteren Kindern gelingt die Fortsetzung der Tafel im Leibniz‘schen Stil. Sie nutzen die Tabellenstruktur, ziehen Spalten und Zeilen, verringern in jeder Zeile den ersten Summanden, notieren die Anzahl der Summanden sowie die Anzahl der Terme pro Zeile und unten links die Gesamtanzahl der Zerlegungen. Dabei ermittelt ein Kind ebenfalls alle Zerfällungen, das zweite kommt auf 13.

Das Notieren der Summandenanzahl übernehmen alle Kinder, dass der Zerlegungsanzahl pro Zeile ausschließlich Melina und die beiden oben genannten. Das Verringern des ersten Summanden übernehmen vier der fünf Kinder.

Auffällig bei allen Kindern ist, dass konsequent das Additionszeichen ‚Plus‘ statt des Punktes wie bei Leibniz verwendet wird. Kinder, die nachgefragt hatten, was die Punkte bedeuten, erarbeiteten zusammen mit der Studentin, dass der Punkt für die additive Verknüpfung steht und entschieden sich dann für das Setzen des Pluszeichens.

Die korrekte Anzahl aller Zerlegungen wurde nebst oben genanntem Kind und Melina noch von einem weiteren ermittelt, welches von Leibniz‘ Struktur lediglich die Steigerung der Summanden und die Verringerung des ersten Summanden pro Zeile übernahm.

Interpretation von Melinas Lösungsprozess

An Melinas verbalen Äußerungen wird erkennbar, dass sie die mathematischen Darstellungen direkt mit der mathematischen Tätigkeit Leibniz‘ verknüpft (Identität). So verwendet sie beispielsweise bei Nachfragen zur Zerfällungstafel das Pronomen *er*:

`warum hat **der** hier immer so punkte ausgelassen/ was hat **er** >hier hingeschrieben/ warum hat **der** eigentlich/ ach so **er** hat drei hier unten da drei zwei eins hingeschrieben`

Melina zeigt sich in ihren verbalen Äußerungen irritiert von den Notationseigenheiten Leibniz‘. So spricht sie die Punkte zwischen den Summanden an, fragt, ob die Sieben an sich selbst mitzählt und welche Bedeutung die Zahlen in der letzten Spalte vor der Klammer haben. Sie macht hier eine Alteritätserfahrung (Historizität), bezieht diese auf die Eigenart der Person Leibniz und nicht auf den historischen Wandel.

Obwohl Melina ein anderes Vorgehen als Leibniz angewandt hat, um alle Zerlegungen zu finden, versucht sie nun genau nach Leibniz‘ Vorgehen die Zerlegungen zur sieben nachzuvollziehen. So bemerkt sie, dass er nicht alle Zerlegungen mit demselben Anfangssummanden in eine Zeile schreibt, sondern die Anzahl der Summanden als Ordnung berücksichtigt. Sie lässt sich bei ihrer Suche nach den Zerlegungen auf die von Leibniz gewählte Struktur ein und geht Zeile für Zeile vor. Es gelingt ihr mit Hilfe der Tafel alle Zerlegungen zur Zahl Sieben fehlerfrei und ohne Dopplung zu finden. Bei der vorangegangenen Zerlegung zur Zahl Sechs tauchten bei ihr noch Dopplungen auf. Dadurch erfährt Melina die Notwendigkeit einer Strukturierung, die auch schon Leibniz genutzt hat (Orientierung). Seine Tafel zu Zerfällungen kann somit auch für gegenwärtige Probleme nützlich sein (Gegenwartsbezug). Melina kann hier die Erfahrung machen, dass für die Ermittlung der Zerlegungen verschiedene Vorgehen möglich sind – abhängig von der fokussierten Struktur. Ebenso wie Leibniz nutzt Melina schließlich Struktur und Zahlbeziehung. Sie thematisiert jedoch weder in ihren Aufzeichnungen noch in ihren Redeanteilen den Bezug zu ihrer vorangegangenen Zerlegung der Zahl Sechs, zu ihrem Vorgehen oder zum Mathematikunterricht im Allgemeinen.

5. Diskussion

Das vorliegende Beispiel zeigt, dass mathematikhistorische Inhalte auch schon für den Grundschulunterricht aufbereitet werden können und Themen zur Anknüpfung bieten.

Die Erprobung im Enrichment-Kurs „Mathe für Cracks“ mit dem Fallbeispiel Melina verdeutlicht außerdem, dass mathematikhistorische Beispiele, die sich thematisch in den Anfangsunterricht eingliedern, ebenso Lern- und Erfahrungschancen für ältere Grundschulkinder bieten.

Der Umgang mit historischen Schriften sowie das Entdecken der Ideen und angewandten Strukturen früherer Mathematikerinnen und Mathematiker ist herausfordernd und kann gleichzeitig durch den Bezug zu den Themen des aktuellen Mathematikunterrichts den Kindern zeigen, dass Mathematik eine Wissenschaft ist, die sich über die Jahre entwickelt hat und noch weiterentwickelt.

Um zu dieser Erkenntnis zu gelangen, ist ein Reflexionsprozess im Anschluss an die Unterrichtssequenz notwendig. Das Fallbeispiel und auch die weiteren Daten zu diesem Unterrichtsbeispiel zeigen, dass die Kinder zwar die Aufgaben lösen und von einigen Notationsweisen Leibniz‘ irritiert sind, allerdings wird der Bezug zur gegenwärtigen Mathematik von den Lernenden nicht verbal geäußert. Hierfür ist es notwendig, die eigene Zahlzerlegung und den Leibniz‘schen Lösungsweg zum Finden aller Zerlegungen gegenüberzustellen und miteinander zu vergleichen. Was ist gleich? Was ist verschieden? Was könnte die Ursache für diese Unterschiede sein?

Auch das bloße Deuten der Zerlegungstafel und somit das Erkennen der von Leibniz angewandten Struktur ist für Lernende nicht ohne weiteres bewältigbar. Erst während der Fortsetzung der Tafel sind Melina im Fallbeispiel weitere Strukturmerkmale innerhalb der Tabelle aufgefallen.

Für solche Erkenntnisprozesse benötigt es Zeit zum Entdecken, Ausprobieren, Kommunizieren und Reflektieren über Mathematik. Mathematikhistorische Beispiele dienen bisweilen zwar nur als Sternstunden im Mathematikunterricht, sie bieten aber auch ein deutliches Potential zur Beantwortung von Fragen an die Mathematikgeschichte, zu Erfahrungen mit unbekannten Denk- und Arbeitsweisen, zur Stärkung der eigenen kulturellen Identität und zum Verständnis von Zielen und Zwecken der im Unterricht verwendeten Mathematik.

6. Literaturverzeichnis

Alder, H. L. (1969). Partition Identities – From Euler to the present. *The America Mathematical monthly, 76* (7), 733–746. https://www.jstor.org/stable/2317861

Andrews, G. E. (2013). Partitions. In R. Wilson & J.J. Watkins (Hrsg.), *Combinatorics: Ancient and Modern* (S. 205–230). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199656592.003.0010

Aristoteles (2011). *Über Werden und Vergehen: De generationne et corruptione*. Felix Meiner.

Aristoteles (1540). *De generatione et corruptione: Francisco Vatablo interprete*. Gryphium.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherche en didactique des mathématiques, 10*(2–3), 241–286.

Barbin, É. (1997). Histoire des Mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin de l'Association Mathématiques du Québec, 37*(1), 20–25.

Barbin, É., & Bénard, D. (Hrsg.). *Histoire et enseignement des mathématiques: Rigueurs, erreurs, raisonnements*. Institut National de Recherche Pédagogique.

Barbin, É. (Hrsg.) (2018). *Let history into the mathematics classroom*. Springer.

Barbin, É., & Tzanakis, C. (2014). History of mathematics and education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of mathematics education* (S. 255–260). Springer.

Barbin, É., Guillemette, D., & Tzanakis, C. (2020). History of mathematics and education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 333–342). Springer.

Barnett, J. H., Lodder, J., & Pengelley, D. (2014). The pedagogy of primary historical sources in mathematics: Classroom practice meets theoretical frameworks. *Science & Education, 23*(1), 7–27. https://doi.org/10.1007/s11191-013-9618-1

Beilner, H. (2004). Empirische Erkundungen zum Geschichtsbewusstsein am Ende der Grundschule. In W. Schreiber (Hrsg.), *Erste Begegnungen mit Geschichte: Grundlagen historischen Lernens* (S. 153–188). Ars Una.

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi, opus posthumum: Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis*. Thurneysen Brothers.

Bessenrodt, Ch., & Pak, I. (2004). Partition congruences by involutions. *European Jounal of Cominatorics*, 25, 1139–1149. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2003.09.018

Biegel, G., Reich, K., & Sonar, T. (Hrsg.) (2008). *Historische Aspekte im Mathematikunterricht an Schule und Universität*. Termessos.

Buchholtz, N., & Schorcht, S. (2014). Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014: 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz* (1341–1342). WTM.

Buchholtz, N., & Schorcht, S. (2016). Erste Ergebnisse aus ÜberLeGMa: Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 50. Jahrestagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016* (1491–1492). WTM.

Buchholtz, N., & Schorcht, S. (2019). Welche Überzeugungen haben Lehramtsstudierende zur Geschichte der Mathematik? – Ergebnisse der Studie ÜberLeGMa. *Mathematica didactica, 42*(1), 67–86. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2019.1373

Buteo, J. (1559). *Logistica*. Lyon.

Calinger, R. (1996). *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. Cambridge University Press.

Cantor, M. (1899). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik: 2. Band*. B. G. Teubner.

Cantor, M. (1901). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik: 3. Band*. B. G. Teubner.

Cantor, M. (1903). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik: 4. Band*. B. G. Teubner.

Cardano, G. (1550). *De Subtilitatae*. Parisii. https://archive.org/details/cardano-the-de-subtilitate

Cardano, G. (1553/1961). *The book on games of chance: The 16th-century treatise on probability*. Dover Publications.

Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1407–1420. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2018). Introduction: Integrating history and epistemology of mathematics in mathematics education. In K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht & C. Tzanakis (Hrsg.) *Mathematics, education and history: Towards a harmonious partnership* (S.1–23). Springer.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2019). History of mathematics in mathematics education: An overview. *Mathematica didactica, 41*(1), 1–26.

Clavius, C. (1608). *In Sphaeram Joannis de Sacrobosco Commenntarius*. S. Gervasius. https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10049335?page=29

Cofman, J. (1999). *Einblicke in die Geschichte der Mathematik: Aufgaben und Materialien für die Sekundarstufe (Band 1).* Springer Spektrum.

Cofman, J. (2001). *Einblicke in die Geschichte der Mathematik: Aufgaben und Materialien für die Sekundarstufe (Band 2)*. Springer Spektrum.

d'Ambrosio, U. (2018). The program Ethnomathematics: Cognitive, anthropological, historic and socio-cultural bases. *PNA, 12*(4), 229–247.

De Moivre, A. (1697). A method of raising an infinite multinomial to any given power or extracting any given root of the same. *Philosophical Transactions, 19,* 619-625. https://doi.org/10.1098/rstl.1695.0110

De Montmort, P. R. (1708). *Essay d'analyse sur les yeux de hazard*. Jacque Quillau. https://www.digitale-sammlungen.de/en/details/bsb10053692

Dieudonné, J. (1985). *Geschichte der Mathematik 1700 – 1900: Ein Abriß*. Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Epple, M. (2000). Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten: Formen der Mathematikgeschichte. *Mathematische Semesterberichte, 47*, 131–163.

Goldmann, L. (1971). *Gesellschaftswissenschaften und Philosophie*. Europäische Verlagsanstalt Frankfurt.

Grabiner, J. (1974). Is mathematical truth time-dependent? *American Mathematical Monthly, 81*(4), 354–365.

Grattan-Guinness, I. (2004a). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica, 31*, 163–185.

Grattan-Guinness, I. (2004b). History or heritage? An important distinction in mathematics for mathematics education. *The American Mathematical Monthly, 111*(1), 1–12.

Habdank-Eichelsbacher, B., & Jahnke, H. N. (1999). Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. In C. Selter, C. & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science: Festschrift für Erich Christian Wittmann* (S. 95–104). Ernst Klett.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz.

Hindenburg, C. F. (1776). *Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden*. Siegfried Lebrecht Crusius.

Jacobs, K. (1983). *Einführung in die Kombinatorik*. Walter de Gruyter.

Jahnke, H. N. (2014). History in mathematics education: A hermeneutic approach. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Hrsg.), *Mathematics and mathematics education: Searching for common ground* (S.75–88). Springer.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Silva da Silva, C. M., & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Hrsg.), *History in mathematics education: The ICMI study* (S.291–328). Kluwer.

Jahnke, H. N., Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2022). Three past mathematicians' views on history in mathematics teaching and learning: Poincaré, Klein, and Freudenthal. *ZDM – Mathematics Education, 54*(7), 1421–1433. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01376-0

Jankvist, U. T. (2007). Empirical research in the field of using history in mathematics education: Review of empirical studies in HPM 2004 & ESU 4. *NOMAD, 12*(3), 83–105.

Jankvist, U. T. (2009a). *Using history as a "goal" in mathematics education* (Doctoral dissertation). IMFUFA.

Jankvist, U. T. (2009b). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235–261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

Jankvist, U. T. (2011). Anchoring students' metaperspective discussions of history in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 346–385. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.4.0346

Jankvist, U. T. (2012). A first attempt to identify and classify empirical studies on history in mathematics education. In B. Shriraman (Hrsg.), *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education* (S. 295–332). Information Age Publishing.

Kaiser, H., & Nöbauer, W. (1984). *Geschichte der Mathematik*. Hölder-Pichler-Tempsky.

Katz, V., & Michalowicz, K. D. (Hrsg.). (2005). *Historical modules for the teaching and learning of mathematics*. The Mathematical Association of America.

Katz, V., & Tzanakis, C. (Hrsg.). (2011). *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*. The Mathematical Association of America.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus: Arithmetik – Algebra – Analysis* (Band 1). Springer.

Knobloch, E. (1973). *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Franz Steiner.

Knobloch, E. (1976). Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik. In E. M. Bruins, G. A. Lindeboom, D. A. Wittop Koning, P. Smit & H.A.M. Snelders Hrsg.), *JANUS. Revue interationale de l'histoire des sciences, de la médicie, de la pharmacie et de la technique* (S. 1-–26). Blikman, Laporte & Dosse B.V.

Knobloch, E. (2013). The origings of modern combinatorics. In R. Wilson & J.J. Watkins (Hrsg.), *Combinatorics: Ancient and Modern* (S.147–166). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199656592.001.0001

Knuth, D. E. (2013). Two thousand years of combinatorics. In R. Wilson & J.J. Watkins (Hrsg.), *Combinatorics: Ancient and Modern* (S. 3–38). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199656592.003.0001

Leibniz, G. W. (1666). *Dissertatio de arte combinatoria*. Fickius Seuboldus.

Lange, K. (1912). *Über Apperzeption: Eine psychologisch-pädagogische Monographie*. Voigtländer.

Lengnink, K., & Schorcht, S. (2019). Mathematik und Geschichte: Mathematikhistorische Ansätze beim Lernen von Mathematik. *Mathematica didactica, 42*(1).

Matthews, M. R. (2014). *International handbook of research in history, philosophy and science teaching*. Springer.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz.

Mersenne, M. (1625/1969). *La vérité des sciences*. Friedrich Fromm Verlag. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k579276.r=mersenne.langFR

Mersenne, M. (1627). *Traité de l'harmonie universelle*. Parisii. https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10599500?page=1

Mersenne, M (1636). *Harmonie universelle*. Sebastien Cramoisy. https://imslp.org/wiki/Harmonie_universelle_(Mersenne,_Marin)

Moyon, M., & Tournès, D. (2018). *Passerelles: Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. Arpeme.

Ostmann, H.-H. (1956). *Additive Zahlentheorie. Erster Teil Allgemeine Untersuchungen*. Springer.

Pacioli, L. (1494). *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*. Paganino de Paganini.

Pengelley, D., Lodder, J., Barnett, J., Bezhanishvili, G., Ranjan, D., & Leung, H. (2009). Historical projects in discrete mathematics and computer science. In B. Hopkins (Hrsg.), *Resources for teaching discrete mathematics* (S.163–276). The Mathematical Association of America.

Poincaré, H. (1914/1973). *Wissenschaft und Methode: Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Pringsheim, A. (1898). Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 6,* 73–83.

Radford, L., Furinghetti, F., & Katz, V. (2007). Introduction: The topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 107–110.

Radford, L., Bernard, A., Fried, M. N., Furinghetti, F., & Sinclair, N. (2014). Reflections on history of mathematics: History of mathematics and mathematics education. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Hrsg.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (S. 89–109). Springer.

Radford, L., & Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the Other: Prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM – Mathematics Education, 54*(7), 1479–1492. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01393-z

Rinner, E. (2024). Das Zerfällungsschemata der „Regula discerptionum et triscerptionum universalis“ von Gottfried Wilhelm Leibniz. In S. Schöneburg-Lehnert, T. Krohn, & L. Dasenbrock (Hrsg.), *Vom Mittelalter in die Moderne – Episoden aus der Mathematikgeschichte: Beiträge zur Jahrestagung Naunhof bei Leipzig, 15. März – 19. März 2023* (S. 89–102). WTM.

Rüsen, J. (2001). *Zerbrechende Zeit: Über den Sinn der Geschichte*. Böhlau.

Sauer, M. (2009). *Geschichte unterrichten: Eine Einführung in die Didaktik und Methodik*. Kallmeyer.

Schorcht, S. (2015). Lehrerinnen und Lehrer zum Einsatz mathematikhistorischer Quellen im Unterricht ausbilden. In R. Krömer, & G. Nickel (Hrsg.), *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, 4*, 49–57.

Schorcht, S. (2018). *Typisierung mathematikhistorischer Beispiele in deutschen Mathematikschulbüchern der Klassenstufe 1 bis 7.* WTM-Verlag.

Schorcht, S. & Buchholtz, N. (2015). Ergebnisse einer Pilotstudie zu Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2025 bis 13.02.2025 in Basel* (S. 1150–1151). WTM-Verlag.

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Klett-Cotta.

Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C.-I., Idrissi, A. E., Gispert, H., Heiede, T., Ismael, A., Jahnke, H. N., Lingard, D., Nobre, S., Philippou, G., Pitombeira de Carvalho, J., & Weeks, C. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In Fauvel, J. & van Maanen, J. (Hrsg.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (S. 91–142). Kluwer.

Schwager, K.-H. (1958). *Wesen und Form des Jahrgangs im Schulunterricht*. Beltz.

Shell-Gellasch, A., & Thoo, J. (2015). *Algebra in context: Introductory algebra from origins to applications*. Johns Hopkins University Press.

Sriraman, B. (2012). *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education*. Information Age.

Stirling, J. (1730). *Tractus de summation et interpolation*. Typis Gul. Bowyer.

Sylvester, J. J., & Franklin, F. (1882). A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact an an exodion. *American Journal of mathematics, 5 (1)* 251-330. https://www.jstor.org/stable/2369545

Tartaglia, N. (1556). *La prima parte del general trattato: libro secondo la secondo parte del general trattato di numeri et misuree*. Vinegia.

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesung über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 36,* 90–100.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C. C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., de Carvalho, J. P., Rodriguez, M., & Siu, M. K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Hrsg.), *History in mathematics education: The ICMI study* (S.201–240). Kluwer.

Wallis, J. (1685). *A treatise of algebra*. John Playford.

Weyer, H. (2018). *Geschichte der Chemie: Altertum, Mittelalter, 16. bis 18. Jahrhundert*. Springer.

Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Vieweg.

Notation

Wendt, M., & Schorcht, S. (2024). Kombinatorik im historischen Verlauf – Mathematikgeschichte im Grundschulunterricht. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis*, *4*.
https://doi.org/10.48648/1wgq-dw62