ISSN 2701-9012 ZMFP, Vol.4 (2023)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Simon Weixler & Daniel Sommerhoff

Vergleich dreier Zugänge zum empirischen Gesetz der großen Zahlen & Variation von Facetten dieses Gesetzes in Aufgaben

Zusammenfassung

Für die Behandlung des empirischen Gesetzes der großen Zahlen in der Sekundarstufe I sind in aktuell gültigen Lehrplänen zum Teil nur wenige Unterrichtsstunden vorgesehen. Ein effektiver Unterrichtseinstieg bzw. Zugang ist diesbezüglich essenziell. Wir stellen drei unterschiedliche Zugänge vor: erstens den Zugang über eine statisch-komparative Perspektive – entsprechend des Konzepts von Biehler und Prömmel (2013) –, zweitens den oftmals in Schulbüchern verwendeten Zugang über eine dynamische Perspektive und drittens den Zugang über Extrembeispiele. Letztgenannter ist ein neuer Ansatz, welcher an vorhandene Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler anknüpft. Wir untersuchen die Effektivität dieser drei Zugänge im Kontext einer Vertiefung des eGdgZ, nachdem die Behandlung dieses Gesetzes im regulären Schulunterricht rund ein halbes Jahr zurücklag. Als Maß nehmen wir die Lösungsraten von $N = 256$ Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben, die den drei Zugängen entsprechende Facetten des empirischen Gesetzes der großen Zahlen abbilden. Das zentrale Ergebnis ist, dass kurzfristig zwar durch alle drei Interventionen eine signifikante Steigerung der Lösungsrate erreicht werden konnte, die Effektstärke aber nur bei der Intervention entsprechend des Zugangs über Extrembeispiele als groß einzustufen ist. Darüber hinaus zeigte sich, dass lediglich die Intervention entsprechend des Zugangs über Extrembeispiele zu einer langfristigeren Steigerung der Lösungsrate führte. Ergänzend überprüfen wir die Effektivität des Zugangs über Extrembeispiele als ini-

Dr. Simon Weixler, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, LMU München, Theresienstraße 39, 80333, München, Deutschland.

e-mail: weixler@math.lmu.de

Prof. Dr. Daniel Sommerhoff, IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik, Olshausenstraße 62, 24118, Kiel, Deutschland.

e-mail: sommerhoff@leibniz-ipn.de

tialem Zugang zum empirischen Gesetz der großen Zahlen im regulären Schulunterricht in der Sekundarstufe I. Hierfür wurde eine zwei Unterrichtsstunden umfassende Sequenz mit N = 13 Schülerinnen und Schülern durchgeführt und erneut die Effektivität anhand der Lösungsrate bei systematisch variierten Aufgaben geprüft – mit wiederum positivem Ergebnis. Zusammengefasst deuten die Resultate beider Studien darauf hin, dass der Zugang über Extrembeispiele einen Zugang zum empirischen Gesetz der großen Zahlen ermöglicht, welcher bei den untersuchten Facetten mit einem im Vergleich zu den beiden anderen Zugängen größeren und langfristigeren Lernerfolg einhergeht. Der von uns in der Ergänzungsstudie verwendete Unterrichtseinstieg sowie eine Sammlung an Aufgaben zum empirischen Gesetz der großen Zahlen mit systematisch variierten Facetten dieses Gesetzes sind im Anhang zu finden.

Schlagworte

Empirisches Gesetz der großen Zahlen, Einführung, Zugänge, Aufgaben, Extrembeispiele

1. Einführung

Für den Mittleren Schulabschluss wurden von der Kultusministerkonferenz Bildungsstandards für das Fach Mathematik verabschiedet (KMK, 2022). Innerhalb der Leitidee Daten und Zufall ist als inhaltsbezogene Kompetenz aufgeführt, dass Schülerinnen und Schüler in der Lage sein sollen, die bei der Durchführung von Zufallsexperimenten auftretenden relativen Häufigkeiten als Schätzwerte von Wahrscheinlichkeiten, welche bei wachsender Größe der Stichprobe besser werden, zu nutzen und zu deuten. Entsprechende Kompetenzerwartungen sind in aktuell gültigen Lehrplänen im Zusammenhang mit der Behandlung des *empirischen Gesetzes der großen Zahlen* (im Folgenden kurz *eGdgZ*) zu finden, beispielsweise: Die Schülerinnen und Schüler „erläutern die Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen anhand konkreter Beispiele und nutzen entsprechend relative Häufigkeiten als sinnvolle Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten“ (ISB, 2020a). Auch im aktuellen PISA Mathematics 2021 Framework (OECD, 2018) wird einem Verständnis von Variabilität in Daten sowie von Unsicherheit eine zentrale Bedeutung zugeschrieben: “Ultimately, the decision maker is left with the dilemma of never knowing for certain what the truth is. The estimate that has been developed is, […] the larger the sample of data, the narrower the range of possible values, although a range cannot be avoided.”

Empirische Studien zeigen jedoch immer wieder, dass trotz Behandlung des eGdgZ im Schulunterricht bei bestimmten Aufgaben (insbesondere solchen, in denen eine statisch-komparative Perspektive[1] eingenommen wird und bei denen der Fokus auf einem vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert liegt – hierzu im weiteren Verlauf mehr) nur von einem kleinen Teil der Probanden die korrekte Lösung angegeben wird. Dieser Befund bezieht sich erschreckenderweise nicht nur auf Schülerinnen und Schüler am Ende der Sekundarstufe I (z. B. Rasfeld, 2004), sondern beispielsweise auch auf Studierende des Lehramts Mathematik (z. B. Weixler, Sommerhoff & Ufer, 2019). Eine naheliegende Ursache für die berichteten Defizite könnte sein, dass aktuell verbreitete Zugänge zum eGdgZ bestimmte Facetten dieses Gesetzes nur unzureichend abbilden und es so in Bezug auf diese Facetten zu systematischen Verständnisdefiziten kommt – eine exemplarische Analyse eines aktuellen Schulbuchs ist im Anhang (7.3) zu finden.

Umfassende Konzepte zur unterrichtlichen Behandlung des eGdgZ in der Sekundarstufe I (und II) wurden beispielsweise bereits von Biehler und Prömmel (2013) sowie von Hußmann und Prediger (2009) und Schnell (2011) entwickelt. Die Wirksamkeit dieser Konzepte ist durch empirische Studien belegt, jedoch sind sie unserer Einschätzung nach in Bezug auf die nur sehr geringe Anzahl an Unterrichtsstunden, die zum Teil in aktuell gültigen Lehrplänen für die Behandlung des eGdgZ vorgesehen ist (vgl. z. B. ISB, 2020a, 2020b) – wir gehen konkret von lediglich *zwei Unterrichtsstunden* aus – schlicht zu umfangreich für die direkte Übertragbarkeit in den regulären Schulunterricht. Entsprechend besteht Bedarf an wissenschaftlich fundierten, empirisch validierten Unterrichtskonzepten zum eGdgZ, welche die zeitliche Limitierung im Schulalltag explizit berücksichtigen.

Mit Blick auf das Ziel, in zwei Unterrichtsstunden möglichst viele Facetten des eGdgZ thematisieren zu können, fokussieren wir im Folgenden – im Sinne des Einstiegs in das Thema – explizit auf *effektive* unterrichtliche *Zugänge* zum eGdgZ, welche (i) im Konzept von Biehler und Prömmel

[1] Eine Übersicht und kurze Erläuterungen zu den von uns unterschiedenen Perspektiven sind auf S. 6f. zu finden.

(2013)[2] sowie in Lehrwerken zur Didaktik der Stochastik zu finden sind, (ii) in Schulbüchern für die Sekundarstufe I gewählt werden sowie (iii) sich aus den Ergebnissen eigener Forschung (Weixler et al., 2019) ableiten lassen. Wir beschreiben diesbezüglich (i) den Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive, (ii) den Zugang über eine *dynamische* Perspektive sowie (iii) den Zugang über *Extrembeispiele* und heben Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieser Zugänge hervor. Ausgehend von den Ergebnissen einer quasi-experimentellen Studie (Sommerhoff, Weixler & Hamedinger, 2022) mit $N = 256$ Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I zur Effektivität kurzer instruktionaler Interventionen, nachdem die unterrichtliche Behandlung des eGdgZ rund ein halbes Jahr zurücklag, stellen wir Folgerungen hinsichtlich der anzunehmenden Effektivität der drei beschriebenen Zugänge als *initiale* Zugänge an. Für den Zugang über *Extrembeispiele* als initialem Zugang im regulären Schulunterricht in der Sekundarstufe I präsentieren wir Ergebnisse einer Ergänzungsstudie mit $N = 13$ Schülerinnen und Schülern.

2. Facetten des empirischen Gesetzes der großen Zahlen

Die Grundlage für die Formulierung des eGdgZ in Schulbüchern stellt meist das wiederholte Durchführen eines Zufallsexperiments, d. h. eine *Versuchsreihe* dar. In der Regel wird dabei nur *eine einzige* Versuchsreihe betrachtet. Es wird *von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses (bzw. Ergebnisses) geschlossen, wobei der Fokus auf dem *zu erwartenden Wert* liegt. Insgesamt gesehen wird eine *dynamische* Perspektive eingenommen: Es wird die Entwicklung der relativen Häufigkeit mit zunehmender Länge der Versuchsreihe betrachtet. Festgehalten wird typischerweise, dass das eGdgZ „besagt, dass sich die empirische relative Häufigkeit eines Ergebnisses bei einem Zufallsversuch bei großen Versuchsanzahlen ‚immer mehr‘ der Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses annähert.“ (Biehler & Prömmel, 2013, S. 16)

[2] Wir beschränken uns im Folgenden auf den im Konzept von Biehler und Prömmel (2013) beschriebenen Zugang – bei dem von Hußmann und Prediger (2009) und Schnell (2011) entwickelten Lehr- und Lernarrangement „Wettkönig“ wurde ein Zugang gewählt, bei dem sowohl eine *statisch-komparative* als auch eine *dynamische* Perspektive eingenommen werden kann.

Ein entsprechendes Beispiel für die Formulierung des eGdgZ in einem aktuellen Schulbuch für Realschulen in Bayern (Eichenlaub-Fürst, Fischer, Katzengruber, Liebau, Mohr & Widl, 2021, S. 131) lautet:

> „In manchen Fällen kann man im Voraus überlegen, wie groß die Chance für ein bestimmtes Ereignis ist. Beim Werfen eines unregelmäßigen Zufallsgerätes, z. B. einem Reißnagel, gelingt das nicht. [...] große Anzahl von Versuchen durchgeführt [...] Mit steigender Anzahl der Versuche nähert sich die relative Häufigkeit immer stärker einem Wert an, dem Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis eintritt **(Empirisches Gesetz der großen Zahlen)**."

Zwei Punkte sind zu diesem Schulbuchauszug anzumerken. Erstens, dass die verwendete Beschreibung „immer stärker" (insbesondere ohne die Verwendung von Anführungszeichen) zur unzutreffenden Vorstellung einer *monotonen* Annäherung verleiten kann. Geeigneter erscheint uns die Beschreibung: „… *stabilisiert* sich die relative Häufigkeit um einen Wert" (vgl. z. B. Krüger, Sill & Sikora, 2015). Und zweitens, dass das Werfen eines Reißnagels als Zufallsexperiment kritisch betrachtet wird[3]. Als unkritisch sehen wir hingegen das Werfen eines „Riemer-Quaders"[4] an – bei diesem handelt es sich ebenfalls um ein unregelmäßiges Zufallsgerät.

Es lassen sich aber auch anderslautende Formulierungen des eGdgZ finden, beispielsweise[5]:

> Bei einer großen Stichprobe ist zu erwarten, dass der Wert in der Stichprobe nah am Wert in der Population liegt und dass er näher kommen wird, je größer die Stichprobe ist **(Empirisches Gesetz der großen Zahlen)**.

[3] Siehe: Freudenthal, H. (1972). The empirical law of large numbers or "the stability of frequencies". *Educational Studies in Mathematics*, 4, 484-490.

[4] Siehe: Riemer, W. (1991). *Stochastische Probleme aus elementarer Sicht*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

[5] Das an oberster Stelle stehende Suchergebnis von Google für „empirical law of large numbers formulations" vom 16.02.2023 lautet wie folgt: "The law of large numbers states that an observed sample average from a large sample will be close to the true population average and that it will get closer the larger the sample."

Hier stellen *Stichproben* (im Sinne von Teilmengen einer Gesamtmenge, der sogenannten *Population*) die Grundlage für die Formulierung des eGdgZ dar, wobei wiederum nur *eine einzige* Stichprobe betrachtet wird. Es wird jedoch nicht *von der Stichprobe auf die Population*, sondern *von der Population auf die Stichprobe* geschlossen, wobei der Fokus auf dem in der Stichprobe *zu erwartenden Wert* liegt. Einleitend wird eine *statische* Perspektive eingenommen: Es wird der Wert bei einer bestimmten Größe der Stichprobe betrachtet. Anschließend wird zu einer *dynamischen* Perspektive gewechselt, indem die Entwicklung des Werts mit zunehmender Größe der Stichprobe betrachtet wird.

Beide Beispiele für Formulierungen des eGdgZ sollen illustrieren, dass erstens unterschiedliche Formulierungen dieses Gesetzes zu finden sind und zweitens bei bestimmten Formulierungen die Gefahr besteht, dass sie zu unzutreffenden Vorstellungen führen.

Von den gemachten Unterscheidungen lassen sich die folgenden aus der einschlägigen Forschungsliteratur ableiten. Wir bezeichnen sie als „Facetten des eGdgZ“:

- *Stichprobe(n)* vs. *Versuchsreihe(n)* (vgl. z. B. Weixler et al., 2019)
- *Eine einzige* Stichprobe bzw. Versuchsreihe vs. *mehrere* Stichproben bzw. Versuchsreihen (vgl. z. B. Sedlmeier & Gigerenzer, 1997)
- Fokus liegt auf dem *zu erwartenden Wert* vs. auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert*[6] (vgl. z. B. Well, Pollatsek & Boyce, 1990)
- Eine *statische* Perspektive wird eingenommen (Wert bei einer bestimmten Größe der Stichprobe(n) bzw. Länge der Versuchsreihe(n) wird betrachtet) vs. eine *dynamische* Perspektive wird eingenommen (es wird die Entwicklung des Werts mit zuneh-

[6] Hierzu ein Beispiel: Wird ein gewöhnlicher Spielwürfel wiederholt geworfen, ist der für die relative Häufigkeit der Augenzahl Sechs zu *erwartende Wert* $\frac{1}{6}$. Statt auf den zu erwartenden Wert könnte der Fokus aber auch darauf gerichtet werden, dass bei allen Würfen stets die Augenzahl Sechs oben liegt. Der Fokus würde dann auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* liegen, im konkreten Fall auf der relativen Häufigkeit 1 für die Augenzahl Sechs.

mender Größe der Stichprobe(n) bzw. Länge der Versuchsreihe(n) betrachtet) vs. eine *statisch-komparative* Perspektive wird eingenommen (Wert bei einer bestimmten Größe der Stichprobe(n) bzw. Länge der Versuchsreihe(n) wird mit dem Wert bei einer anderen Größe der Stichprobe(n) bzw. Länge der Versuchsreihe(n) verglichen) (vgl. z. B. Schnell & Prediger, 2012)

Bezogen auf die obigen Formulierungen des eGdgZ unterscheiden wir zusätzlich als weitere Facette:

– Schluss von der *Stichprobe auf die Population* bzw. von der *relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit* vs. von der *Population auf die Stichprobe* bzw. von der *Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit*

Derartige Gegenüberstellungen sind in reduzierter Form bereits bei anderen Autoren zu finden (z. B. Schnell, 2014). Die von uns vorgenommene *detaillierte* Aufschlüsselung an Unterscheidungen kann insbesondere dabei helfen, Facetten des eGdgZ in Aufgaben systematisch zu variieren (Beispiele: siehe Anhang 7.2) und dadurch gezielt im Unterricht oder in wissenschaftlichen Studien zu thematisieren. Hinsichtlich unterrichtlicher Zugänge zum eGdgZ sehen wir vor allem die Unterscheidung zwischen einer *statisch-komparativen* Perspektive und einer *dynamischen* Perspektive als zentral an.

3. Zugänge zum empirischen Gesetz der großen Zahlen

3.1 Zugang über eine statisch-komparative Perspektive

Beim „Stufenkonzept“ von Biehler und Prömmel (2013) erfolgt der Zugang zum eGdgZ über eine *statisch-komparative* Perspektive. Es stehen initial „Schwankungsvergleiche für zwei verschiedene n“ im Zentrum der Betrachtung. Von den Schülerinnen und Schülern sollen bezogen auf das Werfen einer Münze relative (und simultan auch absolute) Häufigkeiten von Wappen und Zahl bei einer kürzeren Versuchsreihe mit denen bei einer längeren Versuchsreihe verglichen werden, wobei die konkreten Längen der Versuchsreihen jeweils fix sind. Es werden mehrere Versuchsreihen betrachtet, wobei der Fokus auf dem für die relative Häufigkeit zu erwartenden Wert liegt. Die benötigten Daten werden von den Schülerinnen und Schülern anhand von Simulationen generiert.

Ein nahezu analoger, als „datenorientiert“ bezeichneter Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive wird auch im Lehrwerk zur Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I von Krüger et al. (2015) vorgeschlagen. Von den Schülerinnen und Schülern sollen hierbei für mehrere Monate die prozentualen Anteile von Jungen- und Mädchengeburten in einer kleineren und einer größeren Stadt sowie in Deutschland insgesamt verglichen werden. Es werden mehrere Stichproben betrachtet, der Fokus liegt wiederum auf dem in den Stichproben zu erwartenden Wert. Anders als beim Konzept von Biehler und Prömmel (2013) sind die konkreten Größen der Stichproben jedoch nicht fix und die Daten werden von den Schülerinnen und Schülern nicht generiert, sondern stammen aus amtlichen Verzeichnissen. Prototypische Darstellungen beim Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive sind Banddiagramme – Abbildung 1 zeigt ein exemplarisches Beispiel.

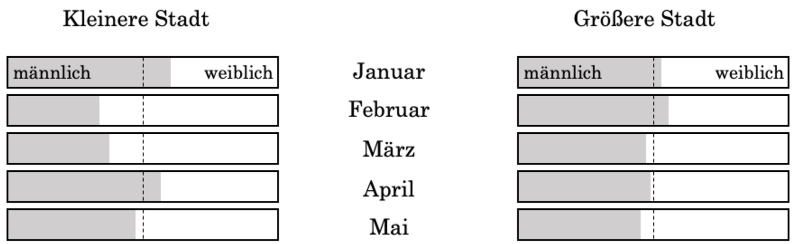


Abbildung 1: Banddiagramme zur Visualisierung der prozentualen Anteile von Jungen- und Mädchengeburten in einer kleineren und einer größeren Stadt

3.2 Zugang über eine dynamische Perspektive

In Schulbüchern (z. B. Eichenlaub-Fürst et al., 2021) erfolgt der Zugang zum eGdgZ oftmals über eine *dynamische* Perspektive. Es wird hierbei zumeist nur eine einzige Versuchsreihe betrachtet und der Fokus liegt auf dem zu erwartenden Wert. Die benötigten Daten werden entweder vorgegeben oder von den Schülerinnen und Schülern mittels selbst durchgeführter Realexperimente oder Simulationen generiert. Von den Schülerinnen und Schülern soll entweder ausgehend von einer bekannten Wahrscheinlichkeit (z. B. für Wappen und Zahl beim Werfen einer Münze) eine Aussage zur Entwicklung der relativen Häufigkeit mit zunehmender Länge der Versuchsreihe getroffen werden oder, bei unbekannter Wahrscheinlichkeit (vgl. Abbildung 2), basierend auf der Entwicklung der relativen Häufigkeit mit zunehmender Länge der Versuchsreihe auf die zugehörige Wahrscheinlichkeit geschlossen werden. Prototypische Darstellungen beim Zugang über eine *dynamische* Perspektive sind Graphiken mit Trajektorien (siehe Abbildung 2).

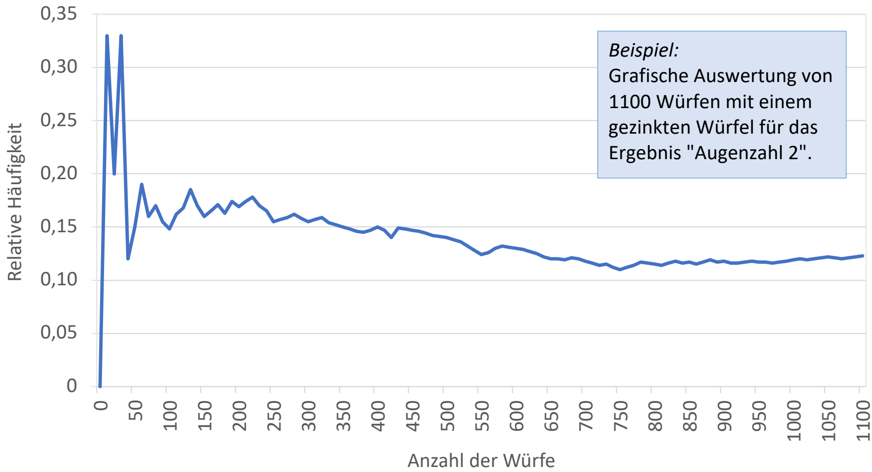


Abbildung 2: Graphik mit Trajektorie (in Anlehnung an Eichenlaub-Fürst et al., 2021, S. 131)

3.3 Zugang über Extrembeispiele

Basierend auf Ergebnissen einer empirischen Studie wird von Weixler et al. (2019) als neuer Zugang zum eGdgZ ein Zugang über *Extrembeispiele* vorgeschlagen. Die von den Schülerinnen und Schülern bei diesem Zugang betrachteten Daten sind fiktiv. Es wird entweder eine einzige Versuchsreihe oder Stichprobe betrachtet oder auch mehrere. Ausgehend von einer bekannten Wahrscheinlichkeit (z. B. für die Augenzahl Sechs beim Werfen eines gewöhnlichen Spielwürfels) soll auf die relative Häufigkeit geschlossen werden. Der Fokus liegt hierbei aber nicht auf dem zu erwartenden Wert, sondern auf dem – bezogen auf das Schwanken der relativen Häufigkeit – maximal (alternativ: minimal) möglichen Wert und somit auf einem vom zu erwartenden Wert abweichenden *extremen* Wert.

Eine mögliche Problemstellung könnte wie folgt lauten:

Was ist eher zu erwarten?

A) Bei 3 Würfen eines gewöhnlichen Spielwürfels wird stets (alternativ: nie) die Augenzahl Sechs erhalten.

B) Bei 30 Würfen eines gewöhnlichen Spielwürfels wird stets (alternativ: nie) die Augenzahl Sechs erhalten.

Durch den Auftrag, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der beiden Ereignisse A und B zu vergleichen, werden die Schülerinnen und Schüler explizit dazu gebracht, eine *statisch-komparative* Perspektive einzunehmen. Indem in den fiktiven Daten die (empirische) relative Häufigkeit 100% (alternativ: 0%) beträgt, kann diese verbal in der Form „stets" (alternativ: „nie") dargestellt werden. Die Länge der Versuchsreihe(n) (bzw. die Größe der Stichprobe(n)) stellt dadurch die einzige numerische Angabe dar und sticht so hervor[7] (im Beispiel auch zusätzlich aufgrund der Position am Satzanfang). Hinsichtlich *natürlichen* Häufigkeiten[8] (vgl. z. B. Krauss, 2003) kommt dem Kontext (hier: Werfen eines gewöhnlichen Spielwürfels) beim Zugang über *Extrembeispiele* eine tragende Rolle zu. Er ist so gewählt, dass die Schülerinnen und Schüler beim Vergleich der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse A und B (vgl. Beispiel) auf (alltägliche) Vorerfahrungen (hier: das Zählen von Fällen, beispielsweise beim Würfelspiel „Kniffel") zurückgreifen können: „Bei wenigen Würfe(l)n kommt es hin und wieder vor, dass relativ viele „Sechser" dabei sind, bei vielen Würfe(l)n ist dies hingegen so gut wie nie der Fall." Dies trägt der Bezeichnung des eGdgZ in manchen Schulbüchern als „Erfahrungstatsache" Rechnung.

Im Zentrum der Lösung der Problemstellung sollten der zu erwartende Wert für die relative Häufigkeit der Augenzahl Sechs (basierend auf der zugehörigen Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{6}$) und das Schwanken der relativen Häufigkeit bei wenigen bzw. vielen Würfen stehen. Eine anschlussfähige Lösung könnte wie folgt formuliert werden: „A) ist eher zu erwarten als

[7] Ergebnisse von Studien mit Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I (z. B. Fischbein & Schnarch, 1997) deuten darauf hin, dass andernfalls nicht die Länge der Versuchsreihe(n) (bzw. die Größe der Stichprobe(n)) hervorsticht, sondern die *Gleichheit von Verhältnissen*, welche (ohne die vorherige Betrachtung von Extrembeispielen) leicht zu einer nicht zutreffenden „Lösung" verleitet (im Beispiel: „3 Mal die Augenzahl Sechs zu erhalten bei 3 Würfen ist gleich wahrscheinlich wie 30 Mal die Augenzahl Sechs zu erhalten bei 30 Würfen, da $\frac{3}{3} = \frac{30}{30}$").

[8] Diese können in einer natürlichen Umgebung durch das Zählen von Fällen gewonnen werden („natural sampling").

B). Begründung: Eine relative Häufigkeit der Augenzahl Sechs von 100% (alternativ: 0%) ist bei der größeren Anzahl an Würfen weniger wahrscheinlich als bei der kleineren, da bei der größeren das Schwanken um den Wert $\frac{1}{6}$ geringer ist.“ Eine Begründung sollte zwingend erfolgen, da auch unzutreffende Schlüsse zur korrekten Antwort „A) ist eher zu erwarten als B).“ führen können, beispielsweise der als ”gambler's fallacy“ bezeichnete. „Zufall“ wird hierbei als sich selbst regulierender Prozess angesehen, in dem eine Abweichung in die eine Richtung zwingend zu einer Abweichung in die andere Richtung führt, damit das Gesamtgleichgewicht wieder hergestellt ist (vgl. Kahneman, Slovic & Tversky, 1982). Folglich wird (unzutreffend) argumentiert, dass nach ein paar Mal Augenzahl Sechs in Folge beim darauffolgenden Wurf die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl Sechs geringer ist – die einzelnen Würfe werden nicht als stochastisch unabhängig angesehen.

Anschließend bietet sich im Sinne eines „Sprungbretts“ die Betrachtung von Abwandlungen der einleitenden Problemstellung an, in denen sich der Fokus ausgehend von extremen Werten hin zu weniger extremen Abweichungen vom zu erwartenden Wert verschiebt, beispielsweise:

> Was ist eher zu erwarten?
>
> A) Bei 6 Würfen eines gewöhnlichen Spielwürfels wird 4 Mal die Augenzahl Sechs erhalten.
>
> B) Bei 60 Würfen eines gewöhnlichen Spielwürfels wird 40 Mal die Augenzahl Sechs erhalten.

Ausgehend von der Begründung der Lösung der einleitenden Problemstellung und basierend auf der Erkenntnis, dass $\frac{40}{60} = \frac{4}{6}$,[9] sollte sich ergeben: „A) ist eher zu erwarten als B). Begründung: Eine relative Häufigkeit der Augenzahl Sechs von $\frac{4}{6}$ ist bei der größeren Anzahl an Würfen weniger wahrscheinlich als bei der kleineren, da bei der größeren das Schwanken um den Wert $\frac{1}{6}$ geringer ist.“

[9] Bei beiden empirischen relativen Häufigkeiten empfiehlt sich die Darstellung als gewöhnlicher Bruch $\frac{4}{6}$, da so der Größenvergleich mit der basierend auf der Wahrscheinlichkeit zu erwartenden relativen Häufigkeit $\frac{1}{6}$ direkt möglich ist.

3.4 Unterschiede und Gemeinsamkeiten der drei Zugänge

Beim Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive wie auch beim Zugang über eine *dynamische* Perspektive können die betreffenden Daten von den Schülerinnen und Schülern mittels Realexperimenten oder anhand von Simulationen generiert werden. Entsprechend können beide Zugänge auch als datenbasierte Zugänge charakterisiert werden. Der Zugang über *Extrembeispiele* unterscheidet sich in diesem Punkt, da hier zwingend auf fiktive, ziemlich unrealistisch erscheinende Daten zurückgegriffen werden muss. Diesbezüglich sehen wir den Zugang über *Extrembeispiele* auch nicht als Spezialfall des Zugangs über eine *statisch-komparative* Perspektive an, wenngleich bei diesem Zugang ebenfalls eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird. Der Fokus liegt beim Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive sowie beim Zugang über eine *dynamische* Perspektive jeweils auf dem zu erwartenden Wert, wohingegen er beim Zugang über *Extrembeispiele* auf einem vom zu erwartenden Wert abweichenden *extremen* Wert liegt.

4. Empirische Befunde zu den drei Zugängen

4.1 Fragestellungen

Ausgehend von den beschriebenen Charakterisierungen stellt sich die Frage nach der Effektivität der einzelnen Zugänge, sowohl absolut betrachtet als auch im gegenseitigen Vergleich. Mit Bezug auf die Implementierung im regulären Schulunterricht, wobei wir basierend auf curricularen Vorgaben (vgl. z. B. ISB, 2020a, 2020b) für die Behandlung des eGdgZ insgesamt zwei Unterrichtsstunden ansetzen, haben wir konkret folgende Fragestellungen untersucht:

- Kann durch eine kurze (ca. 25-minütige) instruktionale Intervention entsprechend der drei beschriebenen Zugänge die Lösungsrate von Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I bei Aufgaben zum eGdgZ statistisch signifikant gesteigert werden?

Für den Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive vermuten wir aufgrund entsprechender positiver empirischer Befunde in vergleichbaren Settings (z. B. Prömmel, 2013) eine signifikante Steigerung der Lösungsrate. In Anlehnung daran erwarten wir, dass bereits bei einer lediglich kurzen instruktionalen Intervention ebenfalls ein positiver, wenn auch gegebenenfalls geringerer Effekt erzielt werden kann. Ergebnisse der Studie von Weixler et al. (2019) zur Wirksamkeit von Extrembeispielen lassen uns Gleiches für den Zugang über *Extrembeispiele* vermuten. Für den Zugang über eine *dynamische* Perspektive liegen uns hingegen keine Daten aus Studien vor, sodass keine Hypothese möglich ist.

- Lassen sich bei den einzelnen Interventionen Unterschiede zwischen den Lösungsraten bestimmter Typen von Aufgaben zum eGdgZ feststellen?

Aufgrund der spezifischen Ausrichtung der einzelnen Zugänge vermuten wir, dass beim Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive auch Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird, die größte Steigerung der Lösungsrate aufweisen. Da bei diesem Zugang der Fokus auf dem *zu erwartenden Wert* liegt, vermuten wir dies im Speziellen für solche Aufgaben, bei denen der Fokus ebenfalls auf dem *zu erwartenden Wert* liegt. Analoges erwarten wir für den Zugang über eine *dynamische* Perspektive und Aufgaben, in denen eine *dynamische* Perspektive eingenommen wird. Da beim Zugang über *Extrembeispiele* eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird, vermuten wir, dass sich hier ebenfalls bei Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird, die größte Steigerung der Lösungsrate ergibt. Der Fokus liegt beim Zugang über *Extrembeispiele* jedoch nicht auf dem *zu erwartenden Wert*, sondern auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert*. Somit ist es für uns naheliegend zu vermuten, dass im Speziellen solche Aufgaben die größte Steigerung der Lösungsrate aufweisen, bei denen der Fokus auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* liegt.

- Lassen sich für die einzelnen Interventionen langfristigere Effekte auf die Lösungsrate bei Aufgaben zum eGdgZ feststellen?

Für den Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive und den Zugang über eine *dynamische* Perspektive liegen weder Annahmen vor, die für noch gegen langfristigere Effekte sprechen. Da der Zugang über *Extrembeispiele* als ein wesentliches Element beinhaltet, dass bei den Schülerinnen und Schülern bereits vor der instruktionalen Intervention vorhandene Erfahrungen aufgegriffen (und ausgebaut) werden, gehen wir mit Bezug auf die Conceptual-Change-Theorie[10] (z. B. Vosniadou,

[10] Im Zentrum dieser Theorie stehen Lernprozesse (hier: von Schülerinnen und Schülern) auf der Basis eigener Vorstellungen, die beispielsweise nur in einem

2013) von einer Weiterentwicklung vorhandener Vorstellungen hin zu mathematisch angemessen(er)en Konzepten aus, sodass hier langfristigere Effekte feststellbar sein sollten.

4.2 Methode

Zur Beantwortung der drei Fragestellungen wurde eine quasi-experimentelle Studie mit $N = 256$ Schülerinnen und Schülern in zehn verschiedenen Klassen der Jahrgangsstufe 6 an Gymnasien in Bayern durchgeführt (zum Zeitpunkt der Erhebung war der aktuell gültige LehrplanPLUS noch nicht in Kraft getreten, das eGdgZ wurde dementsprechend in der Jahrgangsstufe 6 behandelt). Im Rahmen einer 45-minütigen Unterrichtseinheit vor Ort fanden ein Vor- und ein Nachtest statt. Beide Tests beinhalteten jeweils Aufgaben, die den drei Zugängen entsprechende Facetten des eGdgZ abbilden (Abbildung 3 zeigt Beispiele). Außerdem wurde eine ca. 25-minütige instruktionale Intervention [11] durchgeführt, jeweils entsprechend eines der drei Zugänge (3 x 3 Klassen). In der Kontrollklasse wurde anstelle der Intervention ein Würfelspiel ohne Bezug zum eGdgZ gemacht. Ungefähr drei Wochen nach der Intervention erfolgte ein online durchgeführter Follow-up-Test mit zum Vor- und Nachtest analogen Aufgaben, um überprüfen zu können, ob gegebenenfalls langfristigere Effekte vorliegen.

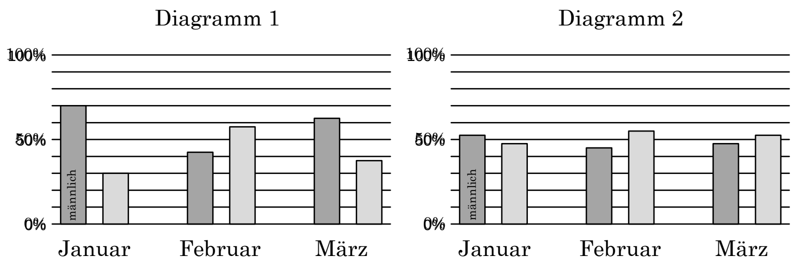
Dass Klassen ausgewählt wurden, in denen das eGdgZ bereits zuvor im regulären Schulunterricht behandelt wurde, liegt darin begründet, dass in der betreffenden Studie (Sommerhoff et al., 2022) mit dem Vortest auch untersucht wurde, zu welchem Grad Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, bestimmte Typen von Aufgaben zum eGdgZ zu lösen. Dies ermöglichte es, einen reliablen Ausgangswert für die Untersuchung der Effektivität der unterschiedlichen Interventionen zu erhalten. Die unterrichtliche Behandlung des eGdgZ lag in allen Klassen ungefähr ein halbes Jahr zurück. Durch die bereits erfolgte Behandlung des eGdgZ im regulären Schulunterricht ist davon auszugehen, dass die Effektivität der Fördermaßnahmen tendenziell eher unterschätzt wird. Von einer an-

Alltagskontext angemessen sind. Ziel ist eine Weiterentwicklung der Vorstellungen hin zu wissenschaftlich angemessenen Konzepten.

[11] Eine detaillierte Darstellung der einzelnen Interventionen ist in Sommerhoff et al. (2022) zu finden.

derweitigen Verzerrung ist nicht auszugehen, da keine der Interventionen explizit Bezug auf unterrichtliche Vorerfahrungen zum eGdgZ nimmt.

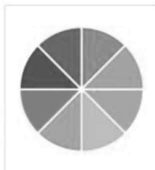
Die beiden Säulendiagramme zeigen die Geschlechterverteilung bei Geburten in Prozent für drei Monate.
Eines der Diagramme zeigt die Geschlechterverteilung in ganz Deutschland, das andere in der Stadt Erding.



Welches Diagramm zeigt die Geschlechterverteilung in ganz Deutschland?

- Diagramm 1
- Diagramm 2
- Das kann man nicht wissen.

Du drehst ein Glücksrad, das in acht gleich große Felder unterteilt ist.
Welchem Wert wird sich die relative Häufigkeit, beim Drehen auf einem dieser Felder stehen zu bleiben, mit wachsender Anzahl der Versuche annähern?



- 0,125
- 0,8
- 0,25
- 0,08

In den Trevi-Brunnen in Rom werden immer wieder Münzen geworfen.
Dass bei 100 Würfen mindestens 70-mal die Zahlseite oben liegt

- ist wahrscheinlicher als
- ist gleich wahrscheinlich wie
- ist weniger wahrscheinlich als

dass bei 10 Würfen mindestens 7-mal die Zahlseite oben liegt.

Abbildung 3: Beispiele für Aufgaben im Vor- und Nachtest (**Oben**: statisch-komparative Perspektive, Fokus liegt auf dem zu erwartenden Wert; **Mitte**: dynamische Perspektive, Fokus liegt auf dem zu erwartenden Wert; **Unten**: statisch-komparative Perspektive, Fokus liegt auf einem vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert)

4.3 Ergebnisse und Analyse

Die durchschnittliche Lösungsrate im Vortest lag über alle $N = 256$ Schülerinnen und Schüler hinweg bei lediglich 31,6%, wobei es sowohl Schülerinnen und Schüler mit einer Lösungsrate von 100% als auch Schülerinnen und Schüler mit keiner einzigen korrekten Lösung gab. Zwischen den 3 x 3 Klassen (entsprechend der drei Zugänge), wie auch im Vergleich zur Kontrollklasse, ergaben sich in Bezug auf die durchschnittliche Lösungsrate keine signifikanten Unterschiede (vgl. Abbildung 4).

Für Aufgaben, in denen eine *dynamische* Perspektive eingenommen wird, ergab sich im Vortest eine durchschnittliche Lösungsrate von 65,6%, wohingegen beide Typen von Aufgaben, in denen jeweils eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird, eine im Vergleich dazu signifikant geringere durchschnittliche Lösungsrate aufwiesen (vgl. Tabelle 1). Dieses Resultat ist aus zweierlei Gründen nicht überraschend: zum einen, da davon ausgegangen werden kann, dass bei der Behandlung des eGdgZ im regulären Schulunterricht ein Zugang über eine *dynamische* Perspektive gewählt wurde, so wie dies in Schulbüchern oftmals der Fall ist (vgl. Anhang 7.3). Zum anderen finden sich für Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird, in vergleichbaren Studien (z. B. Rasfeld, 2004) ähnlich geringe durchschnittliche Lösungsraten.

Durchschnittliche Lösungsrate im Vortest…	**Statisch-komparative** Perspektive, Fokus liegt auf dem **zu erwartenden Wert**	**Dynamische** Perspektive, Fokus liegt auf dem **zu erwartenden Wert**	**Statisch-komparative** Perspektive, Fokus liegt auf einem **vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert**
für alle $N = 256$ Schülerinnen und Schüler	31,6%	65,6%	20,3%

Tabelle 1: Durchschnittliche Lösungsrate für bestimmte Typen von Aufgaben im Vortest

Steigerung der Lösungsrate bei Aufgaben zum eGdgZ

Im Nachtest lag die durchschnittliche Lösungsrate über die $N = 229$ Schülerinnen und Schüler der Interventionsklassen hinweg bei 43,0%. Sie war damit um etwa elf Prozentpunkte höher als die durchschnittliche Lösungsrate im Vortest. Wie aus Abbildung 4 hervorgeht, waren für alle drei Zugänge die durchschnittlichen Lösungsraten im Nachtest höher als im Vortest, wobei für den Zugang über *Extrembeispiele* die größte Steigerung zu erkennen ist.

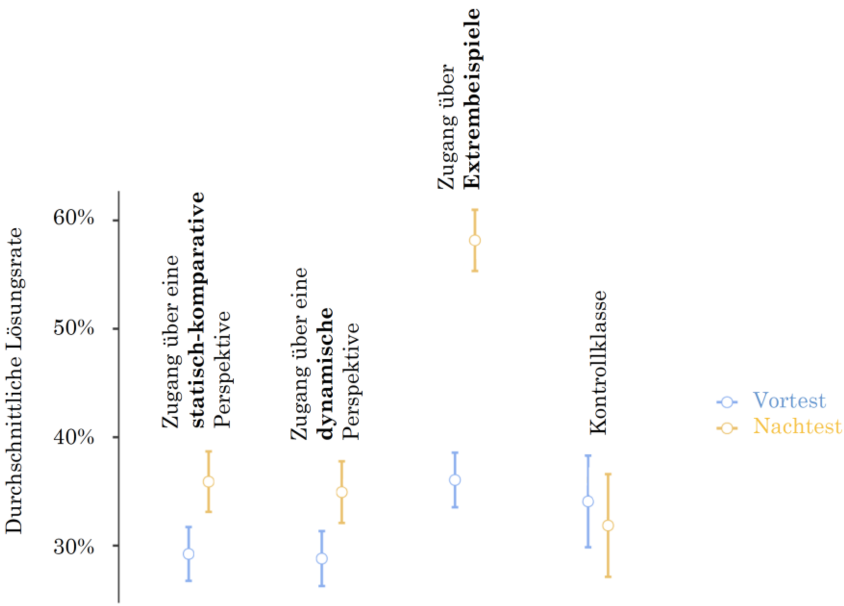


Abbildung 4: Durchschnittliche Lösungsrate im Vor- und Nachtest in Abhängigkeit vom gewählten Zugang bzw. in der Kontrollklasse

Weiterführende Analysen (siehe Sommerhoff et al., 2022) zeigen, dass für alle drei Zugänge jeweils ein signifikanter Unterschied zwischen den Lösungsraten im Vor- und Nachtest gegeben ist ($t(77) = 2{,}439$, $p = {,}015$ bzw.

$t(74) = 2{,}200$, $p = {,}029$ bzw. $t(75) = 7{,}983$, $p = 5{,}060\text{e-}14$). Allerdings liegt nur für den Zugang über *Extrembeispiele* ein Effekt vor, dessen Stärke als groß einzustufen ist (Cohen's $d = 0{,}948$). Für die anderen beiden Zugänge ergeben sich jeweils Effektstärken (Cohen's $d < 0{,}3$), die lediglich als klein anzusehen sind.

Unterschiede zwischen den Lösungsraten bestimmter Typen von Aufgaben zum eGdgZ

Über die $N = 229$ Schülerinnen und Schüler der Interventionsklassen hinweg ergab der Vergleich von Vor- und Nachtest sowohl für Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird und bei denen der Fokus auf dem *zu erwartenden Wert* liegt, als auch für Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird und bei denen der Fokus auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* liegt, eine signifikante Steigerung der durchschnittlichen Lösungsrate (vgl. Tabelle 2; weiterführende Analysen sind in Sommerhoff et al., 2022 zu finden). Für Aufgaben, in denen eine *dynamische* Perspektive eingenommen wird, war die durchschnittliche Lösungsrate im Nachtest hingegen nicht signifikant höher als die durchschnittliche Lösungsrate im Vortest.

Durchschnittliche Lösungsrate im Nachtest (Vortest)…	**Statisch-komparative** Perspektive, Fokus liegt auf dem **zu erwartenden Wert**	**Dynamische** Perspektive, Fokus liegt auf dem **zu erwartenden Wert**	**Statisch-komparative** Perspektive, Fokus liegt auf einem **vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert**
für die *N = 229* Schülerinnen und Schüler der Interventionsklassen	48,9% (32,8%)	69,0% (64,2%)	32,3% (19,9%)
für den Zugang über eine **statisch-komparative** Perspektive (*N = 78*)	47,4% (26,9%)	76,9% (70,5%)	18,4% (16,2%)
für den Zugang über eine **dynamische** Perspektive (*N = 75*)	50,7% (26,7%)	53,3% (56,0%)	23,6% (20,4%)
für den Zugang über **Extrembeispiele** (*N = 76*)	48,7% (44,7%)	76,3% (65,8%)	55,3% (23,2%)
in der Kontrollklasse (*N = 27*)	22,2% (22,2%)	59,3% (77,8%)	25,9% (23,5%)

Tabelle 2: Durchschnittliche Lösungsrate für bestimmte Typen von Aufgaben im Nachtest bzw. Vortest (in Klammern)

Vergleicht man für jeden der drei Typen von Aufgaben getrennt (also innerhalb einer *Spalte* im grau hinterlegten Bereich von Tabelle 2) Vor- und Nachtest für die einzelnen Zugänge, so fällt auf, dass bei Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird und bei denen der Fokus auf dem *zu erwartenden Wert* liegt, sowohl für den Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive als auch für den Zugang über eine *dynamische* Perspektive jeweils eine signifikante Steigerung der durchschnittlichen Lösungsrate vorliegt. Für den Zugang über *Extrembeispiele* ist die durchschnittliche Lösungsrate im Nachtest hingegen nicht signifikant höher als im Vortest, wobei sie absolut betrachtet vergleichbar hoch ist wie die durchschnittlichen Lösungsraten im Nachtest für die anderen beiden Zugänge. Bei Aufgaben, in denen eine *dynamische* Perspektive eingenommen wird, liegt für keinen der drei Zugänge eine signifikante Veränderung der durchschnittlichen Lösungsrate vor.

Allerdings ist für den Zugang über eine *dynamische* Perspektive – entgegen der Erwartung – die durchschnittliche Lösungsrate im Nachtest nicht höher, sondern um ein paar Prozentpunkte geringer als im Vortest und absolut betrachtet sogar um jeweils etwa 23 Prozentpunkte niedriger als die durchschnittlichen Lösungsraten im Nachtest für die anderen beiden Zugänge. Ferner fällt auf, dass bei Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird und bei denen der Fokus auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* liegt, für den Zugang über eine *statisch-komparative* Perspektive und den Zugang über eine *dynamische* Perspektive im Nachtest jeweils keine signifikant höhere durchschnittliche Lösungsrate als im Vortest vorliegt, wohingegen für den Zugang über *Extrembeispiele* eine signifikante Steigerung der durchschnittlichen Lösungsrate gegeben ist.

Als wesentliches Resultat des Vergleichs bestimmter Typen von Aufgaben zum eGdgZ lässt sich festhalten, dass bei Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird und bei denen der Fokus auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* liegt, lediglich die Intervention entsprechend des Zugangs über *Extrembeispiele* zu einer signifikanten Steigerung der durchschnittlichen Lösungsrate führt – absolut betrachtet auf 55,3%. Hingegen liegen die durchschnittlichen Lösungsraten im Nachtest bei diesem Typ von Aufgabe sowohl bei der Intervention entsprechend des Zugangs über eine *statisch-komparative* Perspektive als auch bei der Intervention entsprechend des Zugangs über eine *dynamische* Perspektive jeweils unterhalb der Ratewahrscheinlichkeit (25% im ungünstigsten Fall).

Langfristigere Effekte auf die Lösungsrate bei Aufgaben zum eGdgZ

Am online durchgeführten Follow-up-Test nahmen insgesamt nur noch $N = 64$ Schülerinnen und Schüler teil. Bezogen auf die betreffenden Schülerinnen und Schüler ergab eine Analyse (siehe Sommerhoff et al., 2022), dass nur für die Intervention entsprechend des Zugangs über *Extrembeispiele* ein signifikanter Unterschied zwischen den Lösungsraten im Vor- und Follow-up-Test gegeben ist ($t(30) = 4{,}746$, $p = 1{,}329e\text{-}5$). Die betreffende Effektstärke ist erneut als groß einzustufen (Cohen's $d = 1{,}064$). Für die anderen beiden Interventionen liegen hingegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den Lösungsraten im Vor- und Follow-up-Test vor.

4.4 Zusammenfassung und Diskussion

Im Zentrum unserer Studie stand die Frage nach der Effektivität kurzer instruktionaler Interventionen entsprechend der Zugänge über eine *statisch-komparative* Perspektive, eine *dynamische* Perspektive sowie *Extrembeispiele* – sowohl absolut betrachtet als auch im gegenseitigen Vergleich. Als zentrales Ergebnis lässt sich festhalten, dass kurzfristig zwar durch alle drei Interventionen eine signifikante Steigerung der Lösungsrate von Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I bei Aufgaben, die den drei Zugängen entsprechende Facetten des eGdgZ abbilden, erreicht werden konnte, die Effektstärke aber nur bei der Intervention entsprechend des Zugangs über *Extrembeispiele* als groß einzustufen ist. Darüber hinaus zeigte sich, dass lediglich die Intervention entsprechend des Zugangs über *Extrembeispiele* zu einer langfristigeren Steigerung der Lösungsrate führte. Ein möglicher Grund hierfür könnte sein, dass bei der Intervention entsprechend des Zugangs über *Extrembeispiele* bereits vorhandene Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler aufgegriffen und sukzessive ausgebaut wurden, sodass im Sinne der Conceptual-Change-Theorie (vgl. Vosniadou, 2013) ein Wechsel von präformalen hin zu – bezogen auf den Kontext „Sekundarstufe I“[12] – mehr oder weniger umfassenden formalen Konzepten zum eGdgZ stattfinden konnte. Im Gegensatz dazu ergaben sich durch Interventionen entsprechend der Zugänge über eine *statisch-komparative* Perspektive und eine *dynamische* Perspektive jeweils Effekte, deren Stärke lediglich als klein einzustufen ist und die vergleichsweise kurzfristiger anhielten. Insbesondere ist mit Blick auf die geringen durchschnittlichen Lösungsraten im Vor- und Nachtest bei Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird und bei denen der Fokus auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* liegt, nicht davon auszugehen, dass die geringe Effektstärke in bereits vorhandenen umfassenden formalen Konzepten der Schülerinnen und Schüler aufgrund der ungefähr ein halbes Jahr zuvor erfolgten unterrichtlichen Behandlung des eGdgZ begründet liegt und somit nur ein Artefakt der Studienkonzeption darstellt.

Aufgrund der Ausrichtung der einzelnen Zugänge war unsere Vermutung, dass sich die größte Steigerung der Lösungsrate jeweils bei solchen Aufgaben ergeben würde, die dem betreffenden Zugang entsprechen. Diese Erwartung konnte für die Intervention entsprechend des Zugangs

[12] In der Sekundarstufe I wird beispielsweise das $1/\sqrt{n}$-Gesetz nicht thematisiert.

über eine *statisch-komparative* Perspektive und für die Intervention entsprechend des Zugangs über *Extrembeispiele* bestätigt werden. Für die Intervention entsprechend des Zugangs über eine *dynamische* Perspektive konnte diese Erwartung hingegen nicht bestätigt werden.

Für die beiden Interventionen entsprechend der Zugänge über eine *statisch-komparative* Perspektive und eine *dynamische* Perspektive zeigte sich jeweils, dass Aufgaben, in denen eine *statisch-komparative* Perspektive eingenommen wird und bei denen der Fokus auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* liegt, sowohl im Vergleich zu den beiden anderen Typen von Aufgaben als auch absolut betrachtet sehr schlecht gelöst wurden: Die durchschnittliche Lösungsrate im Nachtest lag unterhalb der Ratewahrscheinlichkeit. Dieser Befund deckt sich mit den Ergebnissen vergleichbarer Studien mit Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I (z. B. Engel & Sedlmeier, 2004; Rasfeld, 2004).

Und nicht zuletzt offenbarten die Nachtest-Ergebnisse, dass über alle drei Interventionen hinweg wie auch in der Kontrollklasse Aufgaben, in denen eine *dynamische* Perspektive eingenommen wird, am besten gelöst wurden. Der Grund hierfür dürfte sein, dass bei der Behandlung des eGdgZ im regulären Schulunterricht rund ein halbes Jahr vor der Intervention überwiegend eine *dynamische* Perspektive eingenommen wurde – entsprechend des in Schulbüchern oftmals verwendeten Zugangs über eine *dynamische* Perspektive (vgl. Anhang 7.3). Darauf lassen die durchschnittlichen Lösungsraten im Vortest ebenfalls schließen.

Zentrale Limitation

Die zentrale Limitation hinsichtlich der Übertragbarkeit der Ergebnisse in den Schulalltag ist dadurch gegeben, dass die $N = 256$ Schülerinnen und Schüler in dieser Studie das eGdgZ bereits ungefähr ein halbes Jahr zuvor im regulären Schulunterricht behandelt hatten. Entsprechende Vorerfahrungen sind bei den drei Interventionen natürlich implizit mit in die Resultate eingeflossen, wenngleich durch Vortest und Kontrollklasse kontrolliert. Insbesondere ist in Bezug auf die Intervention entsprechend des Zugangs über *Extrembeispiele* – dieser beinhaltet als wesentliches Element das Aufgreifen (und den Ausbau) vorhandener Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler – nicht auszuschließen, dass auch auf Vorerfahrungen zum eGdgZ aus einem initial anderen Zugang zurückgegriffen wurde, welche dann zu der als groß einzustufenden Effektstärke mit beigetragen haben könnten. Gleichwohl basierte keine der drei Interventionen explizit auf bereits zuvor behandelten Inhalten zum eGdgZ, sodass diese auch als *initiale* Zugänge zum eGdgZ im regulären Schulunterricht gut umgesetzt werden können.

4.5 Ergänzungsstudie

Anknüpfend an die zentrale Limitation der vorangegangenen Studie stand folgende Fragestellung im Zentrum einer ergänzenden Untersuchung: Führt ein Zugang über *Extrembeispiele* auch dann zu einer signifikanten Steigerung der Lösungsrate bei Aufgaben zu bestimmten Facetten des eGdgZ, wenn die betreffenden Schülerinnen und Schüler dieses Gesetz zuvor noch nicht im regulären Schulunterricht behandelt haben, es sich also beim Zugang über *Extrembeispiele* um den *initialen* Zugang zum eGdgZ handelt? Unsere Erwartung war, dass sich ebenfalls eine signifikante Steigerung der durchschnittlichen Lösungsrate ergibt, da auch ohne eine vorherige unterrichtliche Behandlung des eGdgZ (wie in der Studie zuvor) ausreichend Vorerfahrungen und Anknüpfungspunkte für eine erfolgreiche Implementierung des Zugangs über *Extrembeispiele* vorliegen sollten. Ob die Effektstärke letztlich vergleichbar zur vorangegangenen Studie sein würde, war allerdings unklar.

Zur Beantwortung der Fragestellung führten wir eine empirische Studie mit $N = 13$ Schülerinnen und Schülern mit mathematisch-naturwissenschaftlich-technischem Schwerpunkt in einer geteilten Klasse der Jahrgangsstufe 7 einer Realschule in Bayern in der letzten Schulwoche vor den Sommerferien durch[13]. Gemäß des gültigen Lehrplans war das eGdgZ erst in der übernächsten Jahrgangsstufe, d. h. in Jahrgangsstufe 9, zur Behandlung vorgesehen (ISB, 2020b), sodass hierzu mit keinen systematischen unterrichtlichen Vorerfahrungen zu rechnen war. Im Rahmen von zwei 45-minütigen Unterrichtseinheiten an zwei aufeinander folgenden Tagen wurde entsprechend des Zugangs über *Extrembeispiele* unterrichtet (verwendeter Unterrichtseinstieg: siehe Anhang 7.1). Aufgaben wurden so gewählt, dass sie möglichst viele verschiedene

[13] Aufgrund der Corona-Pandemie (Hygieneverordnung, Wechselunterricht) gestaltete sich die Akquise von Schulklassen im Jahr 2020 als extrem schwierig. Zum Erhebungszeitpunkt stand deswegen nur eine halbe Klasse zur Verfügung.

Facetten des eGdgZ thematisieren (vgl. Anhang 7.2: Sammlung an Aufgaben zum eGdgZ mit systematisch variierten Facetten dieses Gesetzes). Unmittelbar vor Beginn der ersten Unterrichtseinheit fand ein Vortest statt. Die Durchführung des Nachtests fand zwei Tage nach Beendigung der zweiten Unterrichtseinheit statt. Beide Tests waren ähnlich aufgebaut wie die Tests der vorhergehenden Studie. Sie beinhalteten jeweils Aufgaben zu bestimmten Facetten des eGdgZ[14], welche allesamt aus der Literatur (Biehler & Prömmel, 2013; Fischbein & Schnarch, 1997; Sedlmeier & Gigerenzer, 1997; Kahneman & Tversky, 1972) entnommen, jedoch zum Teil geringfügig abgewandelt wurden. Bei jeder der insgesamt fünf Aufgaben im Vor- und Nachtest waren jeweils drei Antwortalternativen zum Ankreuzen vorgegeben. Die Aufgaben im Nachtest unterschieden sich von denen im Vortest nur in Bezug auf die Variation von „Stichprobe(n)“ und „Versuchsreihe(n)“ sowie den konkreten Zahlen, andere zugrunde liegende Strukturen (z. B. die Gleichheit von Zahlenverhältnissen) wurden jeweils beibehalten. Dass durch die Variation von „Stichprobe(n)“ und „Versuchsreihe(n)“ bei den verwendeten Aufgaben kein nennenswerter Einfluss auf die Lösungsrate zu erwarten ist, legen beispielsweise die Ergebnisse der Studie von Weixler et al. (2019) nahe.

Die durchschnittliche Lösungsrate im Vortest belief sich auf 30,8%. Sie liegt somit im Bereich der Ratewahrscheinlichkeit. Es gab keine einzige Bearbeitung mit einer Lösungsrate von 100%, wohingegen sich der Anteil der Bearbeitungen mit nur einer oder keiner einzigen korrekten Lösung auf 69,2% belief. Es zeigte sich entsprechend ein ausgeprägter Bodeneffekt, welcher in der vorangegangenen Studie durch die Auswahl von Klassen, in denen das eGdgZ bereits zuvor im regulären Schulunterricht behandelt worden war, bewusst vermieden wurde.

[14] Konkret: *statisch-komparative* Perspektive, Fokus liegt auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert*, *Stichprobe(n)* vs. *Versuchsreihe(n)*, *eine einzige* Stichprobe bzw. Versuchsreihe vs. *mehrere* Stichproben bzw. Versuchsreihen, Schluss von der *Stichprobe auf die Population* bzw. von der *relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit* vs. von der *Population auf die Stichprobe* bzw. von der *Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit*

Im Nachtest betrug die durchschnittliche Lösungsrate 69,2%. Ein t-Test [15] offenbart, dass diesbezüglich ein signifikanter Unterschied zwischen den Lösungsraten im Vor- und Nachtest vorliegt ($t(12) = 4{,}06$, $p = {,}002$), mit einer Effektstärke, welche wiederum als groß einzustufen ist (Cohen's $d = 1{,}13$). Anders als im Vortest, gab es im Nachtest Bearbeitungen mit einer Lösungsrate von 100%, der entsprechende Anteil belief sich auf 30,8%. Ferner gab es im Nachtest keine einzige Bearbeitung mit keiner korrekten Lösung und lediglich eine Bearbeitung mit nur einer korrekten Lösung.

Als zentrales Ergebnis der Ergänzungsstudie lässt sich somit festhalten, dass für den Zugang über *Extrembeispiele* als *initialer* Zugang zum eGdgZ ebenfalls eine signifikante Steigerung der Lösungsrate bei Aufgaben zu bestimmten Facetten des eGdgZ erreicht werden konnte, wobei eine vergleichbare Effektstärke wie in der vorangegangenen Studie gegeben ist. Es lag sowohl eine deutliche Reduzierung des Anteils an Bearbeitungen mit nur einer oder keiner einzigen korrekten Lösung vor als auch eine deutliche Vergrößerung des Anteils an Bearbeitungen mit einer Lösungsrate von 100%: Knapp ein Drittel der Schülerinnen und Schüler hatte im Nachtest bei allen Aufgaben die korrekte Lösung angekreuzt.

Absolut betrachtet ergab sich für den Zugang über *Extrembeispiele* in der Ergänzungsstudie sogar eine geringfügig höhere durchschnittliche Lösungsrate als in der vorangegangenen Studie, obwohl dort das eGdgZ bereits zuvor im regulären Schulunterricht behandelt worden war. Die höhere Lösungsrate lässt sich jedoch vermutlich darauf zurückführen, dass in der Ergänzungsstudie deutlich mehr Unterrichtszeit zur Verfügung stand (90 Minuten statt 25 Minuten).

Hinsichtlich einer Übertragbarkeit der Ergebnisse der Ergänzungsstudie auf andere Schülerinnen und Schüler gehen wir davon aus, dass unsere Auswahl von Realschülerinnen und -schülern mit mathematisch-naturwissenschaftlich-technischem Schwerpunkt durchaus repräsentativ für den Durchschnitt der Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I ist – sowohl in Bezug auf die Schularten Mittelschule, Realschule

[15] Aufgrund der kleinen Stichprobe sei hier erwähnt, dass mithilfe eines Shapiro-Wilk-Tests überprüft wurde, dass die Annahme einer Normalverteilung der Lösungsraten gerechtfertigt ist und somit ein t-Test angewendet werden kann.

und Gymnasium im dreigliedrigen bayerischen Schulsystem als auch bezüglich des Leistungsvermögens. Eine Limitation ergibt sich jedoch aus der Halbierung der Klassengröße in unserer Studie: Die geringe Anzahl an Schülerinnen und Schülern ermöglichte ein intensives Arbeiten am Lerngegenstand („time on task“), das Unterrichtsgeschehen verlief störungsfrei und es mussten von der Lehrkraft keinerlei Disziplinierungsmaßnahmen ergriffen werden. Dies sind Bedingungen, die in „normalen“ Unterrichtsstunden in der Regel so nicht vorliegen und gegebenenfalls zu einer Überschätzung der Effektivität führen könnten. Weitere, ergänzende Studien sollten folgen, um die Effektmuster zu bestätigen.

5. Relevanz für die unterrichtliche Praxis

Resümierend lässt sich festhalten: Das eGdgZ ist ein zentraler Inhalt des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe I (vgl. KMK, 2022). Es lassen sich verschiedene Formulierungen dieses Gesetzes finden, welche jeweils bestimmte Facetten fokussieren. Um berichteten Defiziten von Schülerinnen und Schülern (vgl. z. B. Rasfeld, 2004) vorzubeugen, sehen wir es als essenziell an, dass die für die unterrichtliche Behandlung zur Verfügung stehende (knapp bemessene) Zeit so effektiv wie möglich genutzt wird, um eine Vielfalt an Facetten des eGdgZ abzubilden und unzutreffende Vorstellungen zu diesem Gesetz zu thematisieren.

Die Ergebnisse der beiden von uns durchgeführten empirischen Studien (siehe auch Sommerhoff et al., 2022) deuten darauf hin, dass ein *initialer* Zugang zum eGdgZ über *Extrembeispiele* mit einem im Vergleich zu den beiden anderen untersuchten Zugängen größeren und langfristigeren Lernerfolg bei bestimmten Facetten dieses Gesetzes einhergeht. Eine offene Forschungsfrage ist allerdings, ob bei den von uns untersuchten Schülerinnen und Schülern nach der Instruktion (weiterhin) unzutreffende Vorstellungen zum eGdgZ existierten und falls ja, welche. Inwieweit die bereits vorhandenen Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler, die beim Zugang über *Extrembeispiele* aufgegriffen wurden, bereits mit adäquaten Vorstellungen verbunden waren, ist ebenfalls eine offene Forschungsfrage. Zusätzliche Forschung ist auch nötig, um herauszufinden, ob „Erfahrungswissen“, welches beim Zugang über *Extrembeispiele* aufgegriffen wird, zu einer unzutreffenden Heuristik in Bezug auf extreme (Einzel-)Werte verleitet, nämlich dass extreme (Einzel-)Werte in großen Stichproben mit größerer Wahrscheinlichkeit auftreten als in kleinen Stichproben – was zutreffend ist – und dass daher die Durchschnittswerte bei großen Stichproben *stärker* schwanken – was unzutreffend ist (vgl. Well et al., 1990).

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die graphische Darstellung zeigt die relativen Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze liegen geblieben ist, in Abhängigkeit von der Anzahl der Durchführungen in den Klassen 8a und 8b.

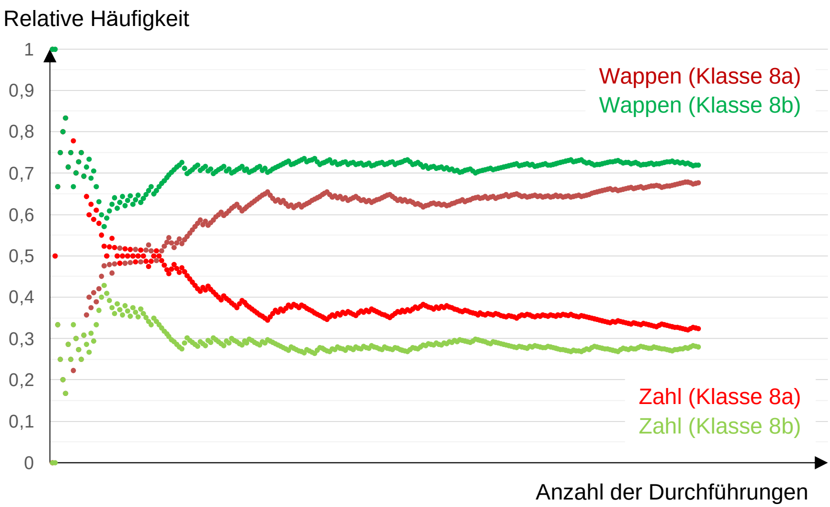


Abbildung 5: Textuelle Beschreibung und graphische Darstellung als Ausgangspunkt für eine systematische Variation von Facetten des eGdgZ

Beim Zugang über *Extrembeispiele* werden bereits vorhandene Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler gezielt aufgegriffen und systematisch ausgebaut. Daran anschließen sollte eine (unter Umständen propädeutische) Thematisierung und systematische Variation von Facetten des eGdgZ in Aufgaben. Diese könnte beispielsweise wie folgt aussehen: Ausgangspunkt sind die in Abbildung 5 dargestellte textuelle Beschreibung und graphische Darstellung (siehe Anhang 7.2: **A38** bzw. **A41**).

Bei der Aufgabenstellung „Gib basierend auf den Daten, die der graphischen Darstellung entnommen werden können, Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten von Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze an.“ liegt der Fokus auf dem *zu erwartenden Wert*, wohingegen er durch die Aufgabenstellung „Was lässt sich basierend auf den Daten, die der graphischen Darstellung entnommen werden können, hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze aussagen?“ auf einen *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* rückt.

Lehrkräfte sollten sich der verschiedenen Facetten bewusst sein, insbesondere da aktuelle Schulbücher die Vielfalt an Facetten unter Umständen nur unzureichend abbilden (vgl. Anhang 7.3: Fazit zur exemplarischen Analyse eines Schulbuchs). Als Anregung und Anhaltspunkte für eigene Variationen (auch hinsichtlich der Fokussierung unterschiedlicher prozessbezogener Kompetenzen) sind im Anhang (7.1 & 7.2) der von uns in der Ergänzungsstudie verwendete Unterrichtseinstieg mittels *Extrembeispielen* sowie eine Sammlung an Aufgaben zum eGdgZ mit systematisch variierten Facetten dieses Gesetzes zu finden. Ausführlichere didaktische Betrachtungen zur Unterrichtskonzeption würden den Rahmen dieses Beitrags sprengen. Hierfür verweisen wir auf die einschlägige Fachliteratur[16]. Außer Frage sollte stehen, dass in der geringen zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit nicht alle der aufgeführten Facetten in jeder Kombination behandelt werden können. Das Wissen über die verschiedenen Facetten sollte jedoch dazu führen, dass diese zumindest so breit wie möglich abgedeckt werden.

Danksagung

Ein besonderer Dank gebührt allen Lehrkräften und Studierenden, die uns bei der Durchführung der Studien tatkräftig unterstützt haben, sowie natürlich auch allen Teilnehmenden an den Studien.

[16] Z. B.: Eichler, A., & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

6. Literaturverzeichnis

Biehler, R., & Prömmel, A. (2013). Von ersten stochastischen Erfahrungen mit großen Zahlen bis zum $1/\sqrt{n}$-Gesetz – ein didaktisch orientiertes Stufenkonzept. *Stochastik in der Schule*, 33(2), 14-25.

Eichenlaub-Fürst, N., Fischer, S., Katzengruber, A., Liebau, B., Mohr, K., & Widl, J. (2021). *Westermann Mathematik 9II/III, Realschule Bayern*. Westermann.

Engel, E., & Sedlmeier, P. (2004). Zum Verständnis von Zufall und Variabilität in empirischen Daten bei Schülern. *Unterrichtswissenschaft. Zeitschrift zur Lernforschung*, 32(2), 169-191.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for research in mathematics education*, 28, 96-105.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2009). Je größer die Wurfanzahl, desto sicherer die Wette – Mit dem Spiel Wettkönig den Zufall auf lange Sicht erkunden. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 51(25), 24-29.

ISB (2020a). LehrplanPLUS Bayern, Gymnasium, Mathematik 8. https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/8/mathematik.

ISB (2020b). LehrplanPLUS Bayern, Realschule, Mathematik 9(II/III). https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/realschule/9/mathematik/wpfg2-3.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive psychology*, 3(3), 430-454.

KMK (2022). Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf.

Krauss, S. (2003). Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das „Häufigkeitskonzept". *Stochastik in der Schule*, 23(1), 2-9.

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Springer Spektrum.

OECD (2018). PISA Mathematics 2021 Framework (Draft). https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf.

Prömmel, A. (2013). *Das GESIM-Konzept: Rekonstruktion von Schülerwissen beim Einstieg in die Stochastik mit Simulationen*. Springer Spektrum.

Rasfeld, P. (2004). Verbessert der Stochastikunterricht intuitives stochastisches Denken? Ergebnisse aus einer empirischen Studie. *Journal für Mathematikdidaktik*, 25, 33-61.

Schnell, S. (2011). „Je höher die Zahlen, desto weniger Bewegung". Lernende erkunden das empirische Gesetz der großen Zahlen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(39), 9-13.

Schnell, S. (2014). *Muster und Variabilität erkunden – Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall*. Springer Spektrum.

Schnell, S., & Prediger, S. (2012). From "everything changes" to "for high numbers, it changes just a bit" – Theoretical notions for a microanalysis of conceptual change processes in stochastic contexts. *ZDM*, 44(7), 825-840.

Sedlmeier, P., & Gigerenzer, G. (1997). Intuitions about sample size: The empirical law of large numbers. *Journal of Behavioral Decision Making*, 10, 33-51.

Sommerhoff, D., Weixler, S., & Hamedinger, C. (2022). Sensitivity to Sample Size in the Context of the Empirical Law of Large Numbers: Comparing the Effectiveness of Three Approaches to Support Early Secondary School Students. *Journal für Mathematik-Didaktik*, https://doi.org/10.1007/s13138-022-00213-x

Vosniadou, S. (2013). *International Handbook of Research on Conceptual Change (2nd Edition)*. London: Routledge.

Weixler, S., Sommerhoff, D., & Ufer, S. (2019). The empirical law of large numbers and the hospital problem: systematic investigation of the impact of multiple task and person characteristics. *Educational Studies in Mathematics*, 100(1), 61-82, https://doi.org/10.1007/s10649-018-9856-x

Well, A. D., Pollatsek, A., & Boyce, S. J. (1990). Understanding the effects of sample size on the variability of the mean. *Organizational behavior and human decision processes*, 47(2), 289-312.

Notation

Weixler, S., & Sommerhoff, D. (2023). Vergleich dreier Zugänge zum empirischen Gesetz der großen Zahlen & Variation von Facetten dieses Gesetzes in Aufgaben. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis*, *4*. https://doi.org/10.48648/krbj-wc69

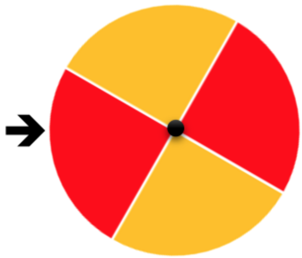
7. Anhang

7.1 In der Ergänzungsstudie verwendeter Unterrichtseinstieg

Grobkonzept mit Erläuterungen

Folgendes Zufallsexperiment wird von der Lehrkraft einleitend präsentiert:

Es wird an einem **Glücksrad** gedreht, das vier gleich große Felder in zwei verschiedenen Farben (Rot und Gelb) hat.



Zum Zufallsexperiment „Drehen eines Glücksrads“ besitzen die Schülerinnen und Schüler bereits Vorerfahrungen aus der Primarstufe[17]. Die Gewinnchance für die Farbe Rot beim einmaligen Drehen am abgebildeten Glücksrad wird im Unterrichtsgespräch geklärt (Quantifizierung: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$). Sollte ein entsprechendes Glücksrad (in der Realität oder in Form einer Simulation) zur Verfügung stehen, kann dieses auch gedreht werden: Für den weiteren Unterrichtsverlauf ist nicht von Relevanz, wie oft der Zeiger dabei auf Rot bzw. Gelb stehen bleibt.

Anschließend werden von der Lehrkraft Problemstellungen präsentiert, die die Schülerinnen und Schüler dazu zwingen, eine *statisch-komparative* Perspektive einzunehmen, wobei der Fokus jeweils auf dem – bezogen auf das Schwanken der relativen Häufigkeit – maximal (alternativ: minimal) möglichen Wert liegt. Betrachtet wird jeweils eine einzige Ver-

[17] ISB (2020c). LehrplanPLUS Bayern, Grundschule, Mathematik 3/4. https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/grundschule/4/mathematik.

suchsreihe. Es ist von den Schülerinnen und Schülern von der Wahrscheinlichkeit („bekannte Gewinnchance“) für die Farbe Rot auf die relative Häufigkeit zu schließen. Die erste Problemstellung lautet:

Was ist eher zu erwarten?

(A) Bei **3 Mal** Drehen bleibt der Zeiger **jedes Mal** auf Rot stehen.

(B) Bei **30 Mal** Drehen bleibt der Zeiger **jedes Mal** auf Rot stehen.

Die erwartete Antwort ist: „(A).“ Es sollte zusätzlich nachgefragt werden, *warum* (A) als wahrscheinlicher anzusehen ist. Zu erwarten ist, dass auf eigene Erfahrungen, genauer das Zählen von Fällen (vgl. 3.3), Bezug genommen wird – entweder direkt beim Zufallsexperiment „Drehen eines Glücksrads“ oder bei anderen Zufallsexperimenten, wie dem Werfen eines gewöhnlichen Spielwürfels. Eine anschlussfähige Begründung könnte wie folgt lauten: „Eine relative Häufigkeit der Farbe Rot von 100% ist bei 30 Mal Drehen weniger wahrscheinlich als bei 3 Mal Drehen, da bei der größeren Anzahl an Versuchsdurchführungen das Schwanken um den Wert $\frac{1}{2}$ geringer ist.“

Folgende Problemstellungen schließen sich an:

Was ist eher zu erwarten?

(A) Bei **30 Mal** Drehen bleibt der Zeiger **jedes Mal** auf Rot stehen.

(B) Bei **100 Mal** Drehen bleibt der Zeiger **jedes Mal** auf Rot stehen.

Was ist eher zu erwarten?

(A) Bei **100 Mal** Drehen bleibt der Zeiger **jedes Mal** auf Rot stehen.

(B) Bei **1000 Mal** Drehen bleibt der Zeiger **jedes Mal** auf Rot stehen.

Wenn du die richtigen Antworten miteinander vergleichst, was fällt dir auf?

Die erwarteten Antworten bei den beiden Fragen „Was ist eher zu erwarten?“ sind wiederum jeweils: „(A).“ Der Vergleich der richtigen Antworten sollte weg von konkreten Anzahlen an Versuchsdurchführungen und hin zur allgemeinen Betrachtung „*kürzere* vs. *längere* Versuchsreihe“ (was weiterhin einer *statisch-komparativen* Perspektive entspricht) bzw. „*mit zunehmender Länge* der Versuchsreihe“ (was den Wechsel zu einer *dynamischen* Perspektive darstellt) führen.

Es bietet sich dann im Sinne eines „Sprungbretts“ die Betrachtung von Abwandlungen der Problemstellungen an, in denen sich der Fokus ausgehend von *extremen* Werten hin zu weniger extremen Abweichungen vom zu erwartenden Wert verschiebt, z. B.:

Was ist eher zu erwarten?

(A) Bei **10 Mal** Drehen bleibt der Zeiger **7 Mal** auf Rot stehen.

(B) Bei **1000 Mal** Drehen bleibt der Zeiger **700 Mal** auf Rot stehen.

Die Begründung der Antworten bei den vorausgegangenen Problemstellungen sollte zusammen mit der Erkenntnis, dass $\frac{700}{1000} = \frac{7}{10}$, zu folgender Lösung führen: „(A) ist eher zu erwarten als (B). Begründung: Eine relative Häufigkeit der Farbe Rot von $\frac{7}{10}$ ist bei einer größeren Anzahl an Versuchsdurchführungen weniger wahrscheinlich als bei einer kleineren, da bei der größeren das Schwanken um den Wert $\frac{1}{2}$ geringer ist bzw. da das Schwanken um den Wert $\frac{1}{2}$ geringer wird, je größer die Anzahl an Versuchsdurchführungen ist.“

Ab hier kann der Unterricht auf verschiedene Weise fortgeführt werden. Beispielsweise kann eine Formulierung des eGdgZ erfolgen, welche aus einer *dynamischen* Perspektive wie folgt lauten könnte:

> Das Schwanken der relativen Häufigkeit eines Ereignisses (um die Wahrscheinlichkeit) wird geringer, je öfter ein Zufallsexperiment durchgeführt wird **(Empirisches Gesetz der großen Zahlen)**.

Daran anschließen sollten eine Betrachtung weiterer, gegebenenfalls systematisch variierter Facetten des eGdgZ (siehe 7.2 für Anregungen) sowie eine Thematisierung unzutreffender Vorstellungen zum eGdgZ. Beispiele für derartige Vorstellungen sind,

- bezogen auf *Versuchsreihen*:
    - Die relative Häufigkeit nähert sich der Wahrscheinlichkeit *monoton* an (vgl. 2).
    - Da sich die relativen Häufigkeiten mit zunehmender Länge der Versuchsreihe stabilisieren – was zutreffend ist –, stabilisieren sich auch die *absoluten* Häufigkeiten (vgl. z. B. Biehler & Prömmel, 2013).
    - Bereits aus einer (sehr) kleinen Anzahl an Versuchen lässt sich *verlässlich* von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit schließen (vgl. Biehler & Prömmel, 2013; vgl. bezogen auf *Stichproben* die Vorstellung von einem „Gesetz der kleinen Zahlen“).
- bezogen auf *Stichproben*:
    - Bereits (sehr) kleine Stichproben sind hoch repräsentativ für die Population (Vorstellung von einem „Gesetz der kleinen Zahlen“, vgl. Kahneman et al., 1982).
    - Da extreme (Einzel-)Werte in großen Stichproben mit größerer Wahrscheinlichkeit auftreten als in kleinen Stichproben – was zutreffend ist –, schwanken die Durchschnittswerte bei großen Stichproben *stärker* (vgl. Well et al., 1990).

7.2 Sammlung an Aufgaben zum eGdgZ mit systematisch variierten Facetten dieses Gesetzes

Basierend auf den in Kapitel 2 aufgeführten Unterscheidungen werden nachfolgend insgesamt 48 Aufgaben[18] (bezeichnet als A1, ..., A48) präsentiert, mit denen jeweils unterschiedliche Facetten des eGdgZ behandelt werden können. Welche Facetten jede Aufgabe konkret beinhaltet, ist in *kursiver Schrift* angegeben (z. B. bei A1: *Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Stichprobe auf die Population – zu erwartender Wert – statisch*). In der Reihenfolge der Aufzählung der Facetten von hinten beginnend, werden die Facetten von einer Aufgabe zur nächsten systematisch variiert, d. h. *statisch* bei A1, *dynamisch* bei A2, *statisch-komparativ* bei A3. Der Fokus liegt bei den Aufgaben A1-A3 jeweils auf dem *zu erwartenden Wert*. Bei den Aufgaben A4-A6 liegt der Fokus dann jeweils auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert* usw.

Die Aufgabenstellungen sind bewusst kurz gehalten (z. B. A3: „Welche der Spalten der Tabelle sollte herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten Schätzwerte für die prozentualen Anteile der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern zu bestimmen?“), um die systematische Variation hinsichtlich einzelner Facetten des eGdgZ hervorzuheben. Für die unterrichtliche Einbettung empfiehlt es sich, gegebenenfalls weiterführende Fragen zu stellen, beispielsweise in Bezug auf Begründungen (z. B. bei A3: „Begründe, warum die mit ‚300 Straßen‘ bezeichnete Spalte herangezogen werden sollte und nicht die mit ‚Drei Straßen‘ oder ‚30 Straßen‘ bezeichneten Spalten.“) oder spezifische Vergleiche innerhalb der Daten (z. B. bei A3: „Was fällt auf, wenn man die Werte in den Spalten ‚Drei Straßen‘, ‚30 Straßen‘ und ‚300 Straßen‘ für die Ziffern 7, 8 und 9 miteinander vergleicht?“).

[18] Einzelne Aufgaben (z. B. A2) sind nur auszugsweise dargestellt, die wesentliche Idee sollte jedoch jeweils erkennbar sein.

A1

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Stichprobe auf die Population – zu erwartender Wert – statisch

Es werden die **führenden Ziffern von Hausnummern** untersucht. Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern der Hausnummern in 300 Straßen einer Stadt.

Ziffer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Anzahl	8760	3852	3060	2752	2396	2176	1892	1700	1460

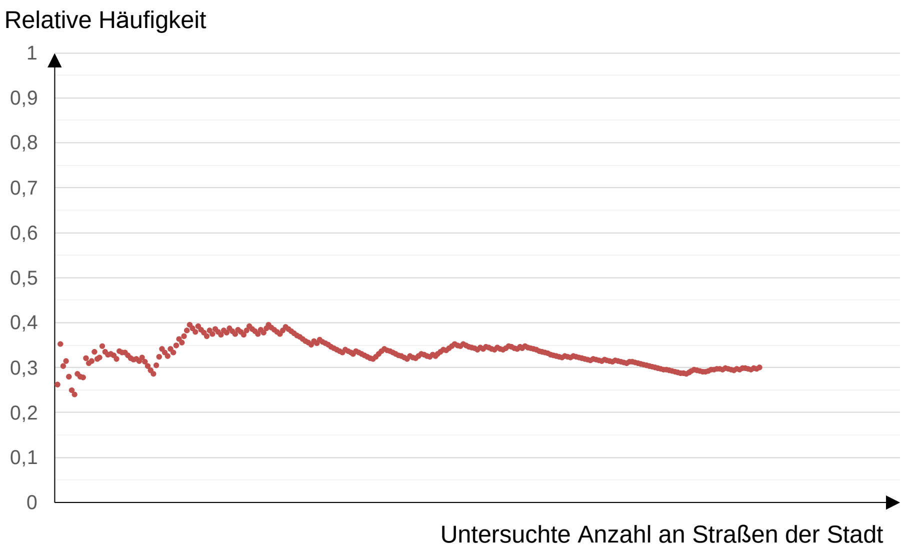
Bestimme basierend auf den Daten in der Tabelle Schätzwerte für die prozentualen Anteile der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern.

A2

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Stichprobe auf die Population – zu erwartender Wert – dynamisch

Es werden die **führenden Ziffern von Hausnummern** untersucht. Die graphischen Darstellungen zeigen die relativen Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 in Abhängigkeit von der untersuchten Anzahl an Straßen einer Stadt.

Ziffer 1:



Ziffer 2:

[...]

Gib basierend auf den Daten, die den graphischen Darstellungen entnommen werden können, Schätzwerte für die prozentualen Anteile der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern an.

A3

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Stichprobe auf die Population – zu erwartender Wert – statisch-komparativ

Es werden die **führenden Ziffern von Hausnummern** untersucht. Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern der Hausnummern in drei, 30 und 300 Straßen einer Stadt.

	Drei Straßen	30 Straßen	300 Straßen
Ziffer 1	76	905	8760
Ziffer 2	33	399	3852
Ziffer 3	33	300	3060
Ziffer 4	26	279	2752
Ziffer 5	23	242	2396
Ziffer 6	20	222	2176
Ziffer 7	13	204	1892
Ziffer 8	13	180	1700
Ziffer 9	13	150	1460

Welche der Spalten der Tabelle sollte herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten Schätzwerte für die prozentualen Anteile der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern zu bestimmen?

A4

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Stichprobe auf die Population – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch

Es werden die **<u>führenden Ziffern von Hausnummern</u>** untersucht. Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern der Hausnummern in 300 Straßen einer Stadt.

Ziffer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Anzahl	8760	3852	3060	2752	2396	2176	1892	1700	1460

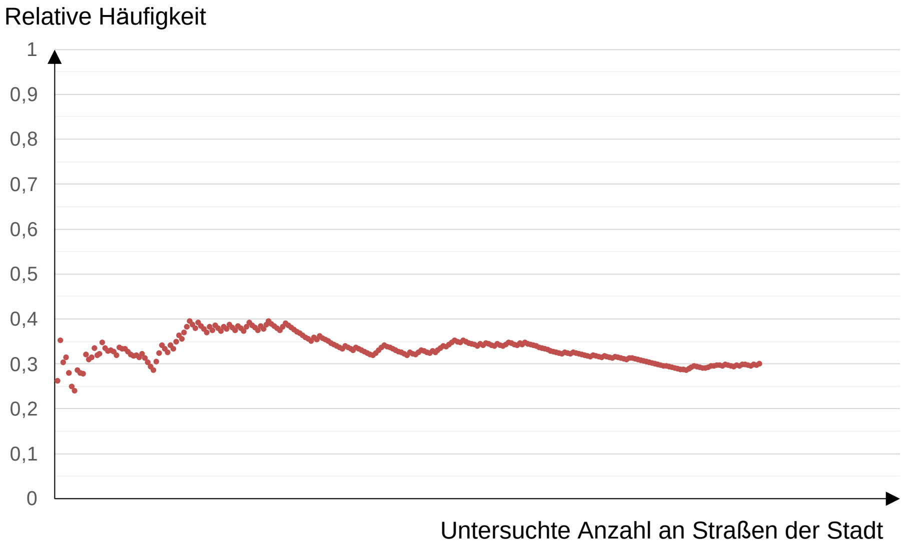
Was lässt sich basierend auf den Daten in der Tabelle hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen prozentualen Anteilen für die Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern aussagen?

A5

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Stichprobe auf die Population – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – dynamisch

Es werden die **führenden Ziffern von Hausnummern** untersucht. Die graphischen Darstellungen zeigen die relativen Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 in Abhängigkeit von der untersuchten Anzahl an Straßen einer Stadt.

Ziffer 1:



Ziffer 2:

[...]

Was lässt sich basierend auf den Daten, die den graphischen Darstellungen entnommen werden können, hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen prozentualen Anteilen für die Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern aussagen?

A6

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Stichprobe auf die Population – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch-komparativ

Es werden die **führenden Ziffern von Hausnummern** untersucht. Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern der Hausnummern in drei, 30 und 300 Straßen einer Stadt.

	Drei Straßen	30 Straßen	300 Straßen
Ziffer 1	76	905	8760
Ziffer 2	33	399	3852
Ziffer 3	33	300	3060
Ziffer 4	26	279	2752
Ziffer 5	23	242	2396
Ziffer 6	20	222	2176
Ziffer 7	13	204	1892
Ziffer 8	13	180	1700
Ziffer 9	13	150	1460

Welche der Spalten der Tabelle sollte herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten die Plausibilität einer Vermutung von gleichen prozentualen Anteilen für die Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern zu prüfen?

A7

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Population auf die Stichprobe – zu erwartender Wert – statisch

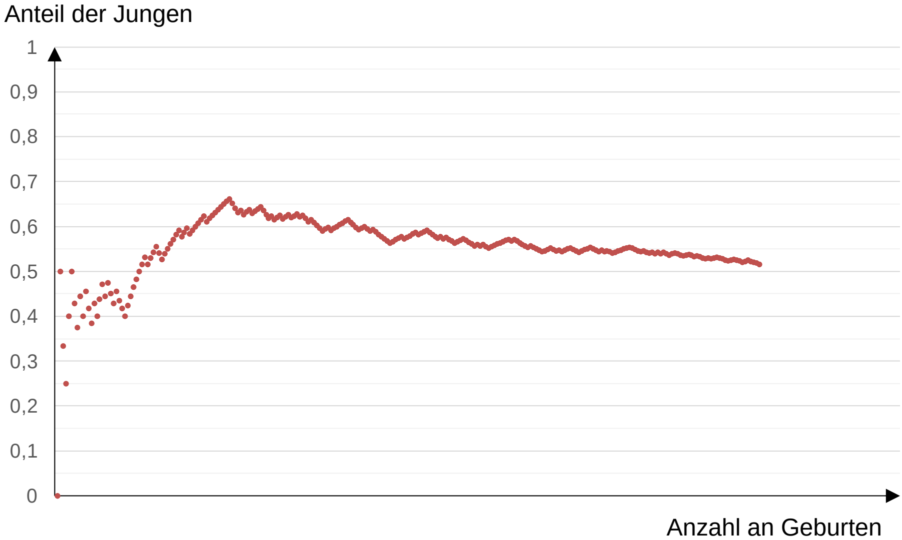
Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Welche der folgenden Zahlen gibt am ehesten an, mit wie vielen Jungen bei 50 Geburten zu rechnen ist?

0	5	12	23	34	45	50	100

A8

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Population auf die Stichprobe – zu erwartender Wert – dynamisch

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Die graphische Darstellung zeigt, wie sich der Anteil der Jungen in Abhängigkeit von der Anzahl der Geburten in einer deutschen Großstadt bislang entwickelt hat.

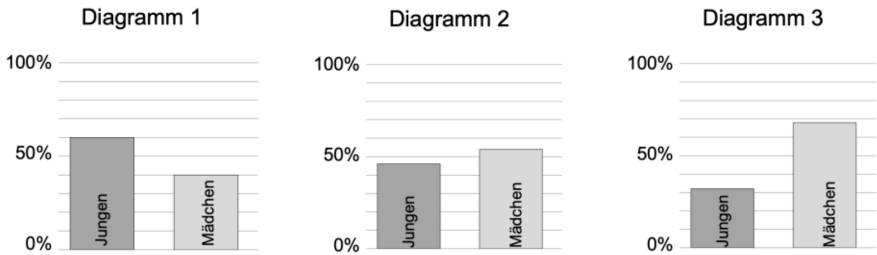


Beschreibe, welcher Verlauf des Graphen mit weiter zunehmender Anzahl der Geburten zu erwarten ist.

A9

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Population auf die Stichprobe – zu erwartender Wert – statisch-komparativ

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Die Säulendiagramme zeigen für Januar 2022 die Anteile von Jungen und Mädchen bei Geburten im Münchner Stadtteil Schwabing, in ganz München sowie in ganz Bayern.



Welches der drei Diagramme zeigt am ehesten die Anteile von Jungen und Mädchen bei Geburten in ganz Bayern?

A10

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Population auf die Stichprobe – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Welches der Ereignisse A, B und C ist diesbezüglich am ehesten zu erwarten?

A) Bei den ersten zehn Geburten im Monat Januar gibt es acht Jungen.
B) Bei den ersten zehn Geburten im Monat Januar gibt es neun Jungen.
C) Bei den ersten zehn Geburten im Monat Januar gibt es zehn Jungen.

A11

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Population auf die Stichprobe – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – dynamisch

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Betrachtet werden die Geburten in einer deutschen Stadt ab dem 1. Januar.

Was lässt sich in Abhängigkeit von der Anzahl der Geburten über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass es keinen einzigen Jungen gibt?

A12

Stichprobe – eine einzige – Schluss von der Population auf die Stichprobe – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch-komparativ

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Welches der Ereignisse A, B und C ist diesbezüglich am ehesten zu erwarten?

A) Bei den ersten zehn Geburten im Monat Januar gibt es acht Jungen.

B) Bei den ersten 100 Geburten im Monat Januar gibt es 80 Jungen.

C) Bei den ersten 1000 Geburten im Monat Januar gibt es 800 Jungen.

A13

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Stichprobe auf die Population – zu erwartender Wert – statisch

Es werden die **<u>führenden Ziffern von Hausnummern</u>** untersucht. Die Tabellen zeigen die absoluten Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern der Hausnummern in 300 Straßen dreier Städte.

Stadt A:

Ziffer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Anzahl	8760	3852	3060	2752	2396	2176	1892	1700	1460

Stadt B:

Ziffer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Anzahl	9546	3993	3279	3013	2748	2504	2161	2000	1811

Stadt C:

Ziffer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Anzahl	9364	4035	3293	3020	2818	2665	2308	2021	1888

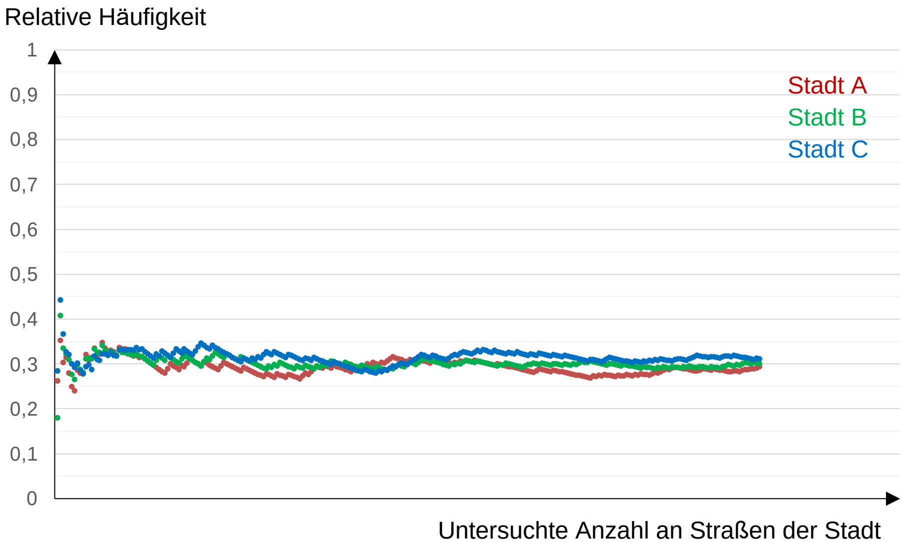
Bestimme basierend auf den Daten in den Tabellen Schätzwerte für die prozentualen Anteile der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern.

A14

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Stichprobe auf die Population – zu erwartender Wert – dynamisch

Es werden die **<u>führenden Ziffern von Hausnummern</u>** untersucht. Die graphischen Darstellungen zeigen die relativen Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 in Abhängigkeit von der untersuchten Anzahl an Straßen dreier Städte.

Ziffer 1:



Ziffer 2:

[...]

Gib basierend auf den Daten, die den graphischen Darstellungen entnommen werden können, Schätzwerte für die prozentualen Anteile der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern an.

A15

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Stichprobe auf die Population – zu erwartender Wert – statisch-komparativ

Es werden die **<u>führenden Ziffern von Hausnummern</u>** untersucht. Die Tabellen zeigen die absoluten Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern der Hausnummern in drei, 30 und 300 Straßen dreier Städte.

Stadt A:

	Drei Straßen	30 Straßen	300 Straßen
Ziffer 1	76	905	8760
Ziffer 2	33	399	3852
Ziffer 3	33	300	3060
Ziffer 4	26	279	2752
Ziffer 5	23	242	2396
Ziffer 6	20	222	2176
Ziffer 7	13	204	1892
Ziffer 8	13	180	1700
Ziffer 9	13	150	1460

Stadt B:

[...]

Welche Spalten der Tabellen sollten herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten Schätzwerte für die prozentualen Anteile der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern zu bestimmen?

A16

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Stichprobe auf die Population – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch

Es werden die **<u>führenden Ziffern von Hausnummern</u>** untersucht. Die Tabellen zeigen die absoluten Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern der Hausnummern in 300 Straßen dreier Städte.

Stadt A:

Ziffer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Anzahl	8760	3852	3060	2752	2396	2176	1892	1700	1460

Stadt B:

Ziffer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Anzahl	9546	3993	3279	3013	2748	2504	2161	2000	1811

Stadt C:

Ziffer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Anzahl	9364	4035	3293	3020	2818	2665	2308	2021	1888

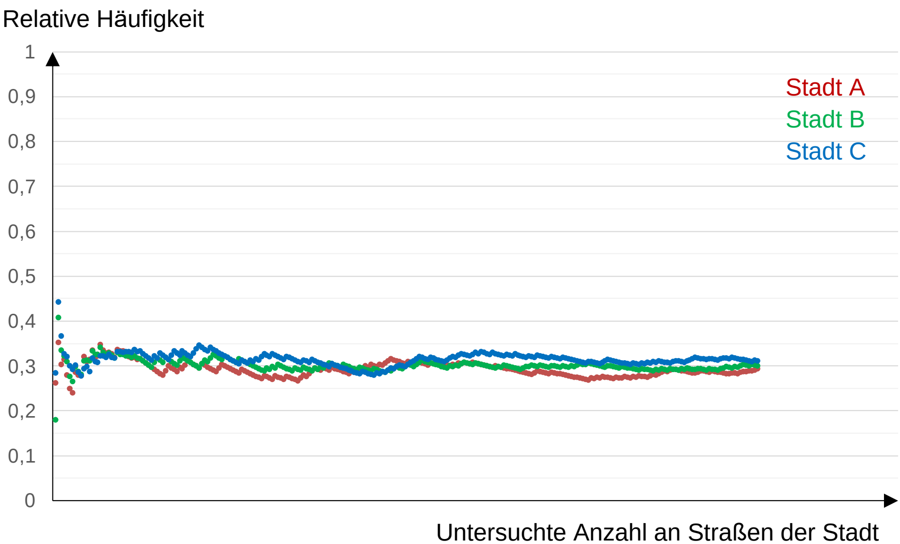
Was lässt sich basierend auf den Daten in den Tabellen hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen prozentualen Anteilen für die Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern aussagen?

A17

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Stichprobe auf die Population – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – dynamisch

Es werden die **<u>führenden Ziffern von Hausnummern</u>** untersucht. Die graphischen Darstellungen zeigen die relativen Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 in Abhängigkeit von der untersuchten Anzahl an Straßen dreier Städte.

Ziffer 1:



Ziffer 2:

[...]

Was lässt sich basierend auf den Daten, die den graphischen Darstellungen entnommen werden können, hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen prozentualen Anteilen für die Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern aussagen?

A18

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Stichprobe auf die Population – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch-komparativ

Es werden die **führenden Ziffern von Hausnummern** untersucht. Die Tabellen zeigen die absoluten Häufigkeiten der Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern der Hausnummern in drei, 30 und 300 Straßen dreier Städte.

Stadt A:

	Drei Straßen	30 Straßen	300 Straßen
Ziffer 1	76	905	8760
Ziffer 2	33	399	3852
Ziffer 3	33	300	3060
Ziffer 4	26	279	2752
Ziffer 5	23	242	2396
Ziffer 6	20	222	2176
Ziffer 7	13	204	1892
Ziffer 8	13	180	1700
Ziffer 9	13	150	1460

Stadt B:

[...]

Welche Spalten der Tabellen sollten herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten die Plausibilität einer Vermutung von gleichen prozentualen Anteilen für die Ziffern 1 bis 9 als führende Ziffern von Hausnummern zu prüfen?

A19

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Population auf die Stichprobe – zu erwartender Wert – statisch

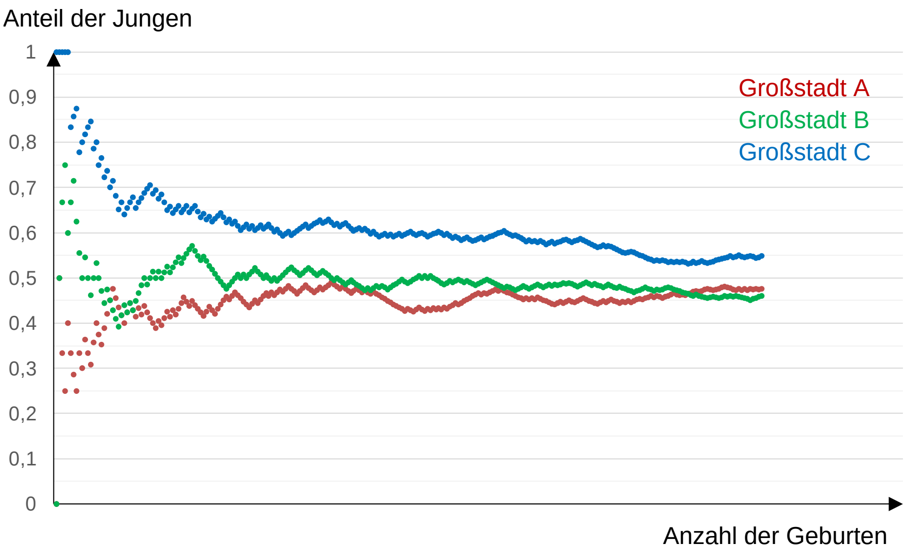
Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Welches der folgenden Zahlentripel gibt am ehesten an, mit wie vielen Jungen bei je 50 Geburten in drei Städten zu rechnen ist?

2	5	12	23	34	45	49	95
0	9	15	21	30	42	50	100
1	3	10	27	20	29	47	97

A20

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Population auf die Stichprobe – zu erwartender Wert – dynamisch

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Die graphische Darstellung zeigt, wie sich der Anteil der Jungen in Abhängigkeit von der Anzahl der Geburten in drei deutschen Großstädten bislang entwickelt hat.

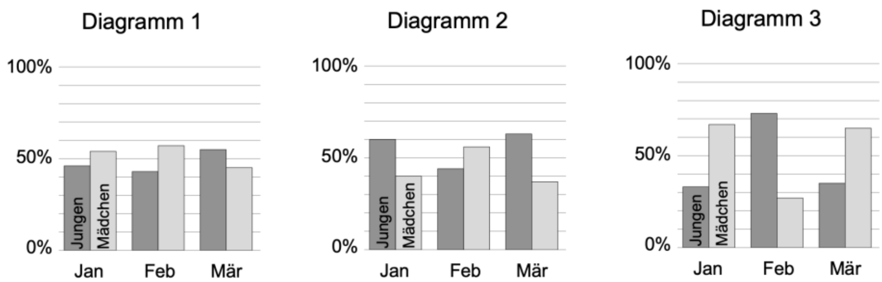


Beschreibe, welcher Verlauf der Graphen mit weiter zunehmender Anzahl der Geburten zu erwarten ist.

A21

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Population auf die Stichprobe – zu erwartender Wert – statisch-komparativ

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Die Säulendiagramme zeigen für Januar, Februar und März 2022 die Anteile von Jungen und Mädchen bei Geburten im Münchner Stadtteil Schwabing, in ganz München sowie in ganz Bayern.



Welches der drei Diagramme zeigt am ehesten die Anteile von Jungen und Mädchen bei Geburten in ganz Bayern?

A22

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Population auf die Stichprobe – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Welches der Ereignisse A, B und C ist diesbezüglich am ehesten zu erwarten?

A) Bei den ersten zehn Geburten in den Monaten Januar, Februar und März gibt es jeweils acht Jungen.

B) Bei den ersten zehn Geburten in den Monaten Januar, Februar und März gibt es jeweils neun Jungen.

C) Bei den ersten zehn Geburten in den Monaten Januar, Februar und März gibt es jeweils zehn Jungen.

A23

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Population auf die Stichprobe – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – dynamisch

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Betrachtet werden die Geburten in drei deutschen Städten ab dem 1. Januar.

Was lässt sich in Abhängigkeit von der Anzahl der Geburten über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass es in allen drei Städten zugleich keinen einzigen Jungen gibt?

A24

Stichprobe – mehrere – Schluss von der Population auf die Stichprobe – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch-komparativ

Die Geschlechterverteilung bei Geburten in Deutschland ist ungefähr 50% Jungen und 50% Mädchen. Welches der Ereignisse A, B und C ist diesbezüglich am ehesten zu erwarten?

A) Bei den ersten zehn Geburten in den Monaten Januar, Februar und März gibt es jeweils acht Jungen.

B) Bei den ersten 100 Geburten in den Monaten Januar, Februar und März gibt es jeweils 80 Jungen.

C) Bei den ersten 1000 Geburten in den Monaten Januar, Februar und März gibt es jeweils 800 Jungen.

A25

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – zu erwartender Wert – statisch

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze bei wiederholter Durchführung liegen geblieben ist.

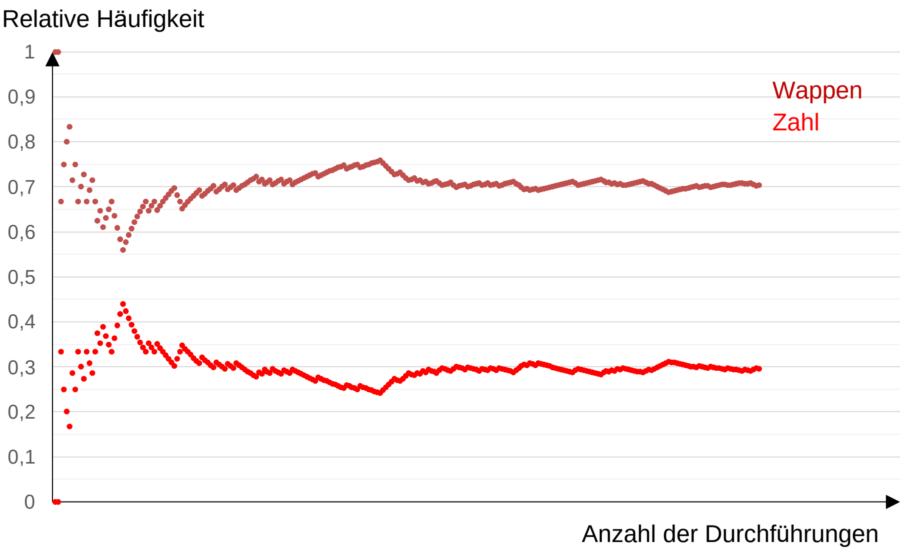
	Wappen	Zahl
Anzahl	332	168

Bestimme basierend auf den Daten in der Tabelle Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten von Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze.

A26

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – zu erwartender Wert – dynamisch

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die graphische Darstellung zeigt die relativen Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze liegen geblieben ist, in Abhängigkeit von der Anzahl der Durchführungen.



Gib basierend auf den Daten, die der graphischen Darstellung entnommen werden können, Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten von Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze an.

A27

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – zu erwartender Wert – statisch-komparativ

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze nach den ersten fünf, 50 und 500 Durchführungen liegen geblieben ist.

	Wappen	**Zahl**
Nach fünf Durchführungen	4	1
Nach 50 Durchführungen	31	19
Nach 500 Durchführungen	332	168

Welche der Zeilen der Tabelle sollte herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten von Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze zu bestimmen?

A28

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze bei wiederholter Durchführung liegen geblieben ist.

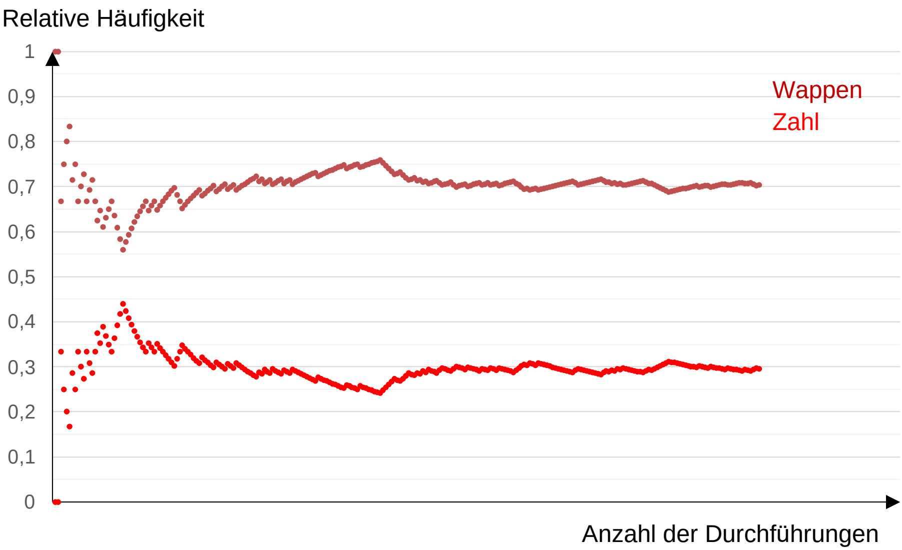
	Wappen	**Zahl**
Anzahl	332	168

Was lässt sich basierend auf den Daten in der Tabelle hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze aussagen?

A29

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – dynamisch

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die graphische Darstellung zeigt die relativen Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze liegen geblieben ist, in Abhängigkeit von der Anzahl der Durchführungen.



Was lässt sich basierend auf den Daten, die der graphischen Darstellung entnommen werden können, hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze aussagen?

A30

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch-komparativ

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze nach den ersten fünf, 50 und 500 Durchführungen liegen geblieben ist.

	Wappen	Zahl
Nach fünf Durchführungen	4	1
Nach 50 Durchführungen	31	19
Nach 500 Durchführungen	332	168

Welche der Zeilen der Tabelle sollte herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten die Plausibilität einer Vermutung von gleichen Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze zu prüfen?

A31

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – zu erwartender Wert – statisch

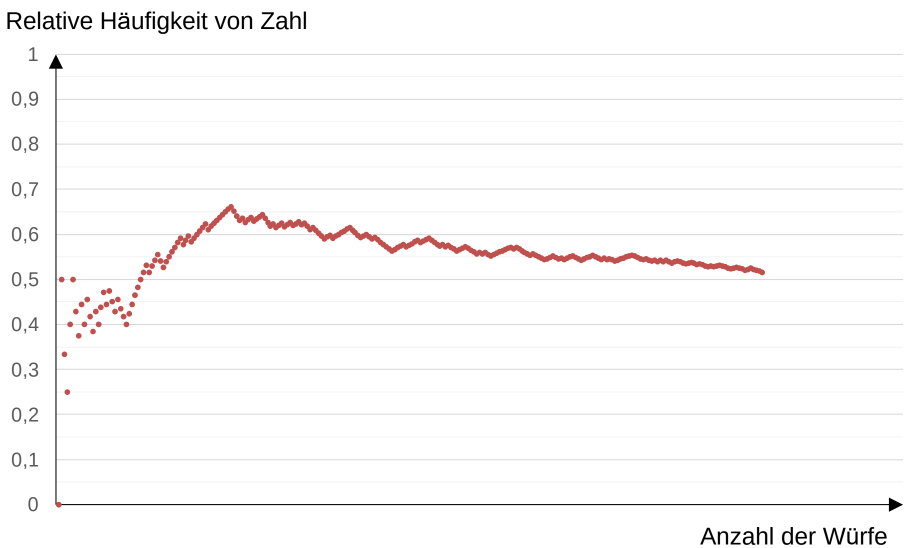
Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Welche der folgenden Zahlen gibt am ehesten an, mit wie viel Mal Zahl bei 50 Würfen zu rechnen ist?

0	5	12	23	34	45	50	100

A32

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – zu erwartender Wert – dynamisch

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Die graphische Darstellung zeigt, wie sich die relative Häufigkeit von Zahl in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfe einer Münze bislang entwickelt hat.

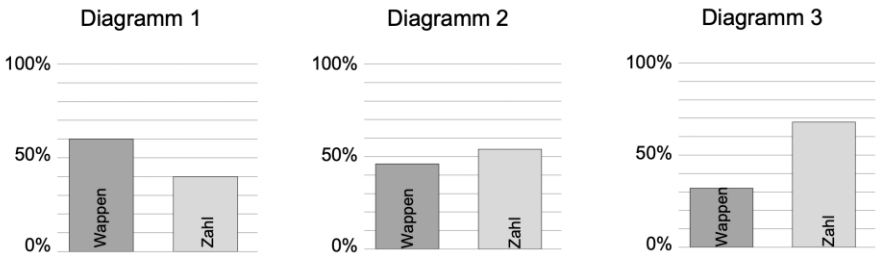


Beschreibe, welcher Verlauf des Graphen mit weiter zunehmender Anzahl der Würfe zu erwarten ist.

A33

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – zu erwartender Wert – statisch-komparativ

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Die Säulendiagramme zeigen für eine 1-€-Münze die relativen Häufigkeiten von Wappen und Zahl bei den ersten zehn, 100 und 1000 Würfen.



Welches der drei Diagramme zeigt am ehesten die relativen Häufigkeiten von Wappen und Zahl bei 1000 Würfen?

A34

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Welches der Ereignisse A, B und C ist diesbezüglich am ehesten zu erwarten?

A) Bei den ersten zehn Würfen einer 1-€-Münze fällt acht Mal Zahl.

B) Bei den ersten zehn Würfen einer 1-€-Münze fällt neun Mal Zahl.

C) Bei den ersten zehn Würfen einer 1-€-Münze fällt zehn Mal Zahl.

A35

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – dynamisch

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Betrachtet werden die Würfe einer 1-€-Münze.

Was lässt sich in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfe über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass kein einziges Mal Zahl fällt?

A36

Versuchsreihe – eine einzige – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch-komparativ

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Welches der Ereignisse A, B und C ist diesbezüglich am ehesten zu erwarten?

A) Bei den ersten zehn Würfen einer 1-€-Münze fällt acht Mal Zahl.

B) Bei den ersten 100 Würfen einer 1-€-Münze fällt 80 Mal Zahl.

C) Bei den ersten 1000 Würfen einer 1-€-Münze fällt 800 Mal Zahl.

A37

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – zu erwartender Wert – statisch

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die Tabellen zeigen die absoluten Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze bei wiederholter Durchführung in den Klassen 8a, 8b und 8c liegen geblieben ist.

Klasse 8a:

	Wappen	**Zahl**
Anzahl	332	168

Klasse 8b:

	Wappen	**Zahl**
Anzahl	317	156

Klasse 8c:

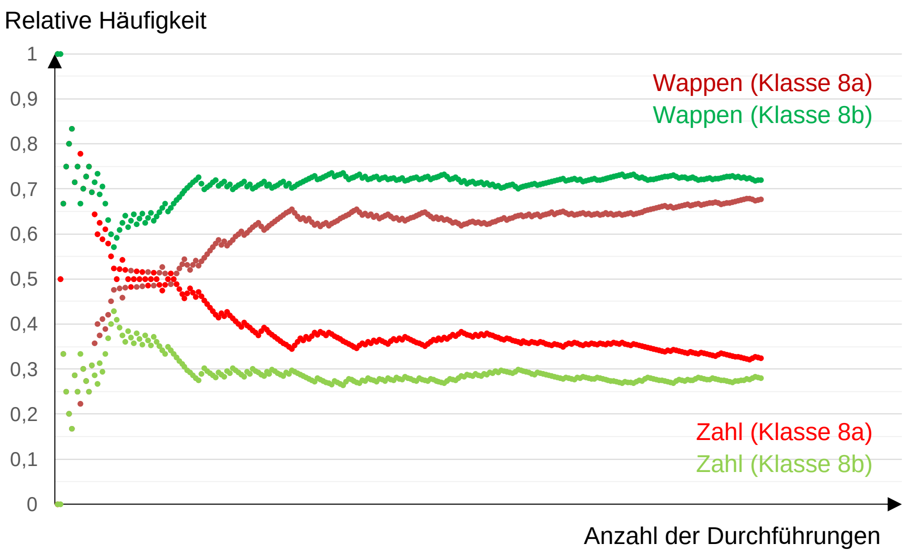
	Wappen	**Zahl**
Anzahl	341	170

Bestimme basierend auf den Daten in den Tabellen Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten von Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze.

A38

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – zu erwartender Wert – dynamisch

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die graphische Darstellung zeigt die relativen Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze liegen geblieben ist, in Abhängigkeit von der Anzahl der Durchführungen in den Klassen 8a und 8b.



Gib basierend auf den Daten, die der graphischen Darstellung entnommen werden können, Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten von Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze an.

A39

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – zu erwartender Wert – statisch-komparativ

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die Tabellen zeigen die absoluten Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze nach den ersten fünf, 50 und 500 Durchführungen in den Klassen 8a und 8b liegen geblieben ist.

Klasse 8a:

	Wappen	**Zahl**
Nach fünf Durchführungen	4	1
Nach 50 Durchführungen	31	19
Nach 500 Durchführungen	332	168

Klasse 8b:

	Wappen	**Zahl**
Nach fünf Durchführungen	4	1
Nach 50 Durchführungen	35	15
Nach 500 Durchführungen	317	183

Welche Zeilen der Tabellen sollten herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten von Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze zu bestimmen?

A40

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die Tabellen zeigen die absoluten Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze bei wiederholter Durchführung in den Klassen 8a, 8b und 8c liegen geblieben ist.

Klasse 8a:

	Wappen	**Zahl**
Anzahl	332	168

Klasse 8b:

	Wappen	**Zahl**
Anzahl	317	156

Klasse 8c:

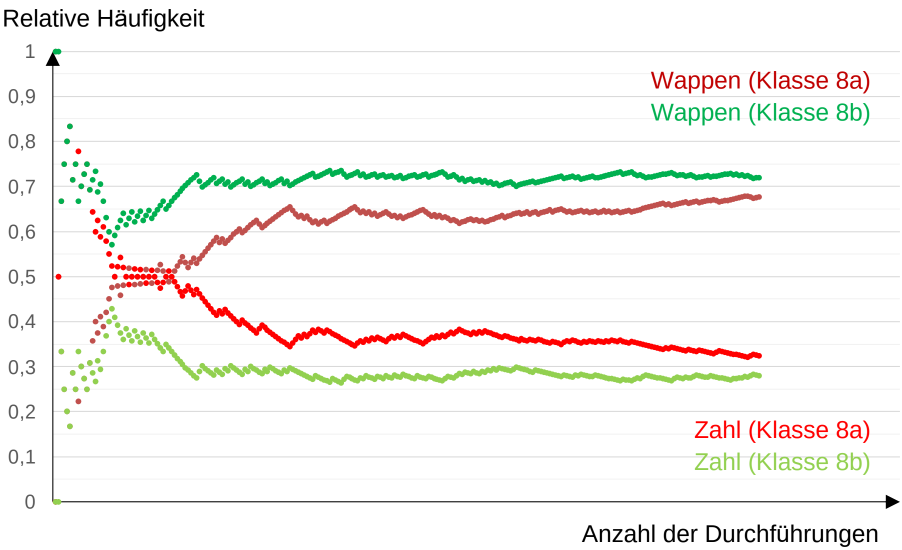
	Wappen	**Zahl**
Anzahl	341	170

Was lässt sich basierend auf den Daten in den Tabellen hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze aussagen?

A41

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – dynamisch

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die graphische Darstellung zeigt die relativen Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze liegen geblieben ist, in Abhängigkeit von der Anzahl der Durchführungen in den Klassen 8a und 8b.



Was lässt sich basierend auf den Daten, die der graphischen Darstellung entnommen werden können, hinsichtlich der Plausibilität einer Vermutung von gleichen Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze aussagen?

A42

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch-komparativ

Eine auf einer harten Unterlage hochkant stehende 1-€-Münze wird durch Schnippen mit dem Finger in eine schnelle Drehung versetzt (*vgl. Fotos*). Die Tabellen zeigen die absoluten Häufigkeiten der Seiten, auf denen die Münze nach den ersten fünf, 50 und 500 Durchführungen in den Klassen 8a und 8b liegen geblieben ist.

Klasse 8a:

	Wappen	**Zahl**
Nach fünf Durchführungen	4	1
Nach 50 Durchführungen	31	19
Nach 500 Durchführungen	332	168

Klasse 8b:

	Wappen	**Zahl**
Nach fünf Durchführungen	4	1
Nach 50 Durchführungen	35	15
Nach 500 Durchführungen	317	183

Welche Zeilen der Tabellen sollten herangezogen werden, um mit den darin enthaltenen Daten die Plausibilität einer Vermutung von gleichen Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl beim schnellen Drehen der Münze zu prüfen?

A43

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – zu erwartender Wert – statisch

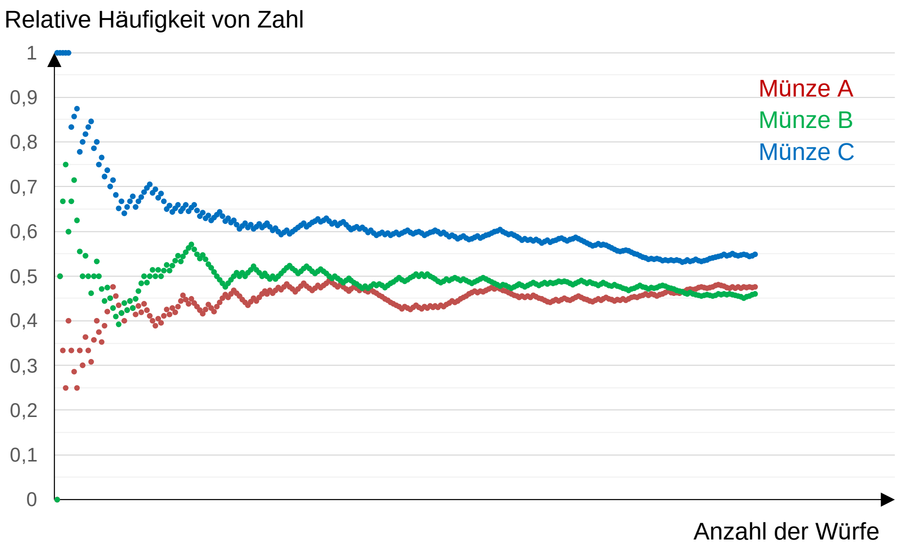
Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Welches der folgenden Zahlentripel gibt am ehesten an, mit wie viel Mal Zahl bei je 50 Würfen dreier Münzen zu rechnen ist?

2	5	12	23	34	45	49	95
0	9	15	21	30	42	50	100
1	3	10	27	20	29	47	97

A44

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – zu erwartender Wert – dynamisch

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Die graphische Darstellung zeigt, wie sich die relative Häufigkeit von Zahl in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfe dreier Münzen bislang entwickelt hat.

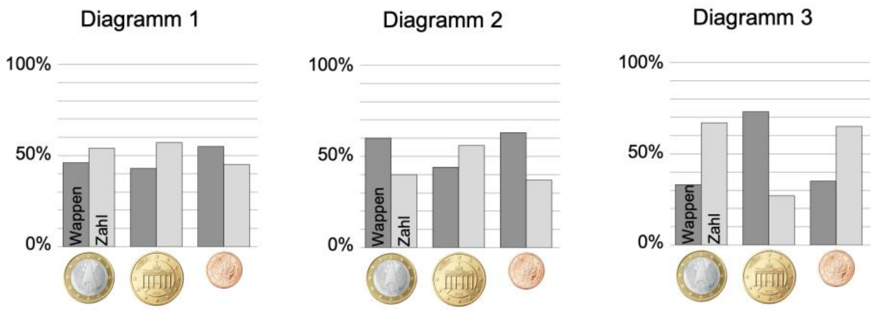


Beschreibe, welcher Verlauf der Graphen mit weiter zunehmender Anzahl der Würfe zu erwarten ist.

A45

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – zu erwartender Wert – statisch-komparativ

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Die Säulendiagramme zeigen für drei Münzen die relativen Häufigkeiten von Wappen und Zahl bei den ersten zehn, 100 und 1000 Würfen.



Welches der drei Diagramme zeigt am ehesten die relativen Häufigkeiten von Wappen und Zahl bei 1000 Würfen?

A46

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Welches der Ereignisse A, B und C ist diesbezüglich am ehesten zu erwarten?

A) Bei den ersten zehn Würfen einer 1-€-Münze, 50-Cent-Münze und 1-Cent-Münze fällt jeweils acht Mal Zahl.

B) Bei den ersten zehn Würfen einer 1-€-Münze, 50-Cent-Münze und 1-Cent-Münze fällt jeweils neun Mal Zahl.

C) Bei den ersten zehn Würfen einer 1-€-Münze, 50-Cent-Münze und 1-Cent-Münze fällt jeweils zehn Mal Zahl.

A47

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – dynamisch

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Betrachtet werden die Würfe dreier Münzen.

Was lässt sich in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfe über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass bei allen drei Münzen zugleich kein einziges Mal Zahl fällt?

A48

Versuchsreihe – mehrere – Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit – vom zu erwartenden Wert abweichender Wert – statisch-komparativ

Beim Werfen einer Münze sind die Wahrscheinlichkeiten für Wappen und Zahl jeweils 50%. Welches der Ereignisse A, B und C ist diesbezüglich am ehesten zu erwarten?

A) Bei den ersten zehn Würfen einer 1-€-Münze, 50-Cent-Münze und 1-Cent-Münze fällt jeweils acht Mal Zahl.

B) Bei den ersten 100 Würfen einer 1-€-Münze, 50-Cent-Münze und 1-Cent-Münze fällt jeweils 80 Mal Zahl.

C) Bei den ersten 1000 Würfen einer 1-€-Münze, 50-Cent-Münze und 1-Cent-Münze fällt jeweils 800 Mal Zahl.

7.3 Exemplarische Analyse eines Schulbuchs: Westermann Mathematik 9II/III, Realschule Bayern (Eichenlaub-Fürst et al., 2021)

Das Kapitel „Empirisches Gesetz der großen Zahlen“ erstreckt sich über zwei Seiten (S. 131/132). Den Einstieg in dieses Kapitel bildet folgende Aufgabe („1“), bei der das Foto eines mit Augenzahlen beklebten „Riemer-Quaders“ aus Holz abgedruckt ist:

> „Mit einem normalen Würfel und einem Quader mit gleicher Anordnung der Augenzahlen wird gewürfelt.
> Untersuche die Häufigkeit der Ereignisse ‚Würfeln einer Sechs‘ und ‚Würfeln einer Zwei‘ für beide Zufallsgeräte.
> a) Begründe, warum die Untersuchung ‚Sechs‘ und ‚Zwei‘ ausreicht.
> b) Wirf jedes Gerät 25-mal und lege eine Tabelle für den normalen Würfel und eine für den Quader an.
> Berechne die relativen Häufigkeiten.
> [*Abgedruckt ist eine Tabelle, bei der in der ersten Spalte die Anzahl der Würfe mit 25, 50 und 100 angegeben ist. In der zweiten Spalte ist die absolute Häufigkeit für ‚Sechs‘ einzutragen, in der dritten Spalte die relative Häufigkeit für ‚Sechs‘, in der vierten Spalte die absolute Häufigkeit für ‚Zwei‘ und in der fünften Spalte die relative Häufigkeit für ‚Zwei‘.*]
> c) Übernimm die absoluten Häufigkeiten von deinen Mitschülern und addiere sie zu deinen absoluten Häufigkeiten. Berechne die relativen Häufigkeiten.
> d) Zeichne jeweils ein Liniendiagramm, das die Entwicklung der relativen Häufigkeiten für ‚Sechs‘ und ‚Zwei‘ beim Würfel und beim Quader zeigt.
> e) Beschreibe, was dir beim Verlauf der Liniendiagramme auffällt.“

→ **Analyse:** *dynamische* Perspektive, Fokus liegt auf dem *zu erwartenden Wert*, Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit (oder umgekehrt beim „normalen Würfel“), *eine einzige Versuchsreihe*

In der Randspalte links neben dem Aufgabentext sind zwei Köpfe mit Sprechblase abgebildet. Der Text in der oberen Sprechblase lautet: „Den

Quader kannst du aus Pappe bauen oder einen Holzbauklotz verwenden [.]“ Der Text in der unteren Sprechblase ist: „Zur Auswertung kannst du ein Tabellenkalkulationsprogramm verwenden.“

Unterhalb der Aufgabe ist farblich hinterlegt und mit „Empirisches Gesetz der großen Zahlen“ betitelt ein „Merksatz“-Kasten abgedruckt, sein Inhalt lautet:

> „In manchen Fällen kann man im Voraus überlegen, wie groß die Chance für ein bestimmtes Ereignis ist. Beim Werfen eines unregelmäßigen Zufallsgerätes, z. B. einem Reißnagel, gelingt das nicht. Um dennoch die Chance für ein bestimmtes Ereignis angeben zu können, muss eine große Anzahl von Versuchen durchgeführt werden. Mit steigender Anzahl der Versuche nähert sich die relative Häufigkeit immer stärker einem Wert an, dem Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis eintritt
> **(Empirisches Gesetz der großen Zahlen)**.
> [*Abgedruckt ist eine Graphik mit Trajektorie – siehe Abbildung 2 im Kapitel 3.2*]
> Im Beispiel nähert sich die relative Häufigkeit dem Wert 0,12 an.“

→ **Analyse:** *dynamische* Perspektive, Fokus liegt auf dem *zu erwartenden Wert*, Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit, *eine einzige Versuchsreihe*

Auf der nächsten Seite folgen „Übungen“. Die erste Aufgabe („2“) lautet wie folgt:

> „Die abgebildeten Glücksräder wurden 200[-]mal gedreht. Die Häufigkeit der Ergebnisse sind in den Diagrammen dargestellt.
> [*Abgedruckt sind nebeneinander drei Glücksräder A, B und C, wobei Glücksrad A in vier gleich große Sektoren unterteilt ist, welche in den Farben Grün bzw. Gelb bzw. Blau bzw. Rot farblich hinterlegt sind. Glücksrad B ist in acht gleich große Sektoren unterteilt, wovon drei in der Farbe Grün farblich hinterlegt sind, zwei in der Farbe Blau und zwei in der Farbe Rot sowie einer in der Farbe Gelb. Glücksrad C ist in einen ‚180°-Sektor‘ (Gelb), einen ‚90°-Sektor‘ (Blau) und zwei ‚45°-Sektoren‘ (Grün bzw. Rot) unterteilt. Unterhalb von den Glücksrädern sind nebeneinander drei Säulendiagramme D, E und F abgedruckt. Säulendiagramm A zeigt eine*

> *Säule in roter Farbe mit dem Wert 55, eine Säule in grüner Farbe mit dem Wert 70, eine Säule in gelber Farbe mit dem Wert 25 sowie eine Säule in blauer Farbe mit dem Wert 45. Säulendiagramm B zeigt eine Säule in roter Farbe mit dem Wert 35, eine Säule in grüner Farbe mit dem Wert 40, eine Säule in gelber Farbe mit dem Wert 80 und eine Säule in blauer Farbe mit dem Wert 45. Säulendiagramm C zeigt eine Säule in roter Farbe mit dem Wert 45, eine Säule in grüner Farbe mit dem Wert 50 und eine Säule in gelber Farbe mit dem Wert 50 sowie eine Säule in blauer Farbe mit dem Wert 45.*]
>
> a) Ordne Diagramme und Glücksrad richtig zu. Begründe deine Zuordnung.“

→ **Analyse:** rein *statische (nicht komparative)* Perspektive, Fokus liegt auf dem *zu erwartenden Wert*, Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit (oder umgekehrt), *eine einzige Versuchsreihe*

> „b) Welche Ergebnisse erwartest du jeweils für 1000 Drehungen?“

→ **Analyse:** rein *statische (nicht komparative)* Perspektive, Fokus liegt auf dem *zu erwartenden Wert*, Schluss von der Wahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit, *eine einzige Versuchsreihe*

Die zweite Übungsaufgabe („3“) lautet wie folgt, wobei ein Auszug eines Blattes einer Tabellenkalkulation abgebildet ist (erste Spalte „Münzwurf Nr.“, zweite Spalte „Kopf“, dritte Spalte „absolute Häufigkeit“ und vierte Spalte „relative Häufigkeit“; Werte werden bis einschließlich Münzwurf Nr. 18 angezeigt):

> „Paul und Max haben in ihrem Kalkulationsprogramm eine Tabelle für die Auswertung beim Münzwurf erstellt.
>
> a) Beschreibe die Einträge in den Spalten A bis D.
> b) Lege selbst eine Tabelle an. Wirf eine Münze 100-mal und trage die Ergebnisse für das Ereignis ‚Kopf liegt oben‘ in die Spalte B ein.
> c) Die Formel in Zelle C3 lautet:
> =C2+B3. Erkläre.
> d) Wie lautet die Formel für die Zelle D3?
> Kopiere deine Formel in die darunter liegenden Zellen.
> e) Welcher relativen Häufigkeit nähern sich die Werte an? Hättest du diesen Wert erwartet? Begründe.“

→ **Analyse:** *dynamische* Perspektive, Fokus liegt auf dem *zu erwartenden Wert*, Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit, *eine einzige Versuchsreihe*

> „f) Um die Entwicklung der relativen Häufigkeit für das Ereignis ‚Kopf liegt oben' grafisch darzustellen, markierst du die Spalte D und klickst auf das Symbol zum Erstellen eines Diagramms."

Die dritte und zugleich letzte Übungsaufgabe („4") lautet wie folgt, wobei Fotos von den drei möglichen Lagen eines Schraubverschlusses einer PET-Flasche (Öffnung unten bzw. Öffnung oben bzw. Öffnung seitlich hochkant stehend) abgebildet sind:

> „Bringt von zu Hause verschiedene Schraubverschlüsse für Flaschen mit.
> a) Sucht zu zweit (oder in der Gruppe) einen Flaschendeckel aus und werft ihn je 100-mal. Haltet in einer Strichliste fest, wie der Deckel liegen bleibt.
> b) Berechnet für jede Lage die relative Häufigkeit.
> c) Vergleicht für die verschiedenen Flaschendeckel die relative Häufigkeit für das Ereignis ‚Kante'. Was fällt euch auf?"

→ **Analyse:** rein *statische (nicht komparative)* Perspektive, Fokus liegt auf dem *zu erwartenden Wert*, ggf. Schluss von der relativen Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit, *eine einzige Versuchsreihe*

Gesamtfazit: Anhand der Beschreibungen der Aufgaben sowie der kursiven Hervorhebungen ist ersichtlich, dass nur Versuchsreihen betrachtet werden, jedoch keine *Stichproben*. Bei den Versuchsreihen wird jeweils nur eine einzige betrachtet, nicht *mehrere*. Der Fokus liegt stets auf dem zu erwartenden Wert, nie auf einem *vom zu erwartenden Wert abweichenden Wert*. Eine *statisch-komparative* Perspektive wird an keiner Stelle (explizit) eingenommen bzw. ist an keiner Stelle (explizit) einzunehmen. Der Schwerpunkt liegt klar auf einer dynamischen Perspektive.