ISSN 2701-9012 ZMFP, Vol.6 (2025)

Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Sarah Völker, Patricia Heck Ribeiras & Gerald Wittmann

Darstellungen zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses im Tausenderraum – Eine Analyse von Schulbüchern für Klasse 3

Zusammenfassung

In Klasse 3 findet die Erweiterung vom Hunderter- zum Tausenderraum statt. Darstellungen und Darstellungswechsel gelten dabei als zentral für die Entwicklung des Stellenwertverständnisses. Mittels einer qualitativen Inhaltsanalyse wurden deshalb 16 Schulbücher für Klasse 3 hinsichtlich der Darstellungen zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses im Tausenderraum untersucht. Zunächst wurden alle vorkommenden Darstellungen erfasst. Weiter wurde für ausgewählte Darstellungen (unstrukturierte Objekte, das Zehnersystem-Material, Punktebilder, die Zahlenkarten, die Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung, das Tausenderfeld, die Tausendertafel und die Stellentafel mit Objekten) herausgearbeitet, in welcher Weise sie jeweils eingesetzt werden. Zudem wurden nicht-kanonische Darstellungen und Hinweise zum Lesen und Schreiben von Zahlen genauer in den Blick genommen. Es zeigt sich, dass eine Vielzahl an Darstellungen eingesetzt werden und sich die Verwendung der Darstellungen zum Teil erheblich von Schulbuch zu Schulbuch unterscheidet, beispielsweise hinsichtlich der Einführung oder Anordnung der jeweiligen Darstellung. Darüber hinaus deckt sich die Verwendung der Darstellungen nicht in allen Fällen mit Erkenntnissen der mathematikdidaktischen Forschung.

Schlagworte

Darstellungen, Tausenderraum, Stellenwertverständnis, Schulbuchanalyse

Sarah Völker, Patricia Heck-Ribeiras & Gerald Wittmann, Pädagogische Hochschule Freiburg, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg im Breisgau, Deutschland.

Kontakt: sarah.voelker@ph-freiburg.de

1. Einführung

Schulbüchern kommt im Mathematikunterricht der Grundschule eine besondere Bedeutung zu. So sind sie nicht nur grundsätzlich ein Aspekt des Lernangebots (Angebots-Nutzungs-Modell nach Helmke, 2022), sondern werden auch von Lehrkräften genutzt: 82,4% der Lehrkräfte der deutschen TIMSS-2015-Stichprobe verwendeten Schulbücher als Grundlage und 16,3% als Ergänzung für ihren Mathematikunterricht in Klasse 4 (Wendt et al., 2017). Schulbuchanalysen belegen allerdings inhaltliche Unterschiede bezüglich der angebotenen Lerngelegenheiten, etwa zu Zahlzerlegungen (Lenz & Wittmann, 2023) oder dem quantitativen Vergleich (Sievert et al., 2021) in Klasse 1 sowie zum flexiblen Rechnen (Sievert, et al., 2019) in Klasse 3, wobei diese Unterschiede nicht auf den ersten Blick zu erkennen sind, sondern nur in Folge detaillierter Analysen. Zudem ist die empirische Befundlage in Bezug auf den Zusammenhang zwischen dem eingeführten Schulbuch und der Mathematikleistung der Kinder ambivalent: So belegten Sievert et al. (2019; 2021) jeweils einen solchen Zusammenhang, während Van Steenbrugge et al. (2013) dies nicht bestätigen konnten.

Speziell für den Mathematikunterricht in der Grundschule ist das Angebot an Schulbüchern vielfältig: Allein in Baden-Württemberg sind derzeit 16 Schulbuchreihen zugelassen bzw. gelistet (ZSL, 2024). Deshalb ist es immer wieder relevant zu untersuchen, in welcher Weise sich die darin angebotenen Lerngelegenheiten im Hinblick auf mathematikdidaktische Kriterien unterscheiden und worin Gemeinsamkeiten bestehen. Im Folgenden werden in diesen 16 Schulbuchreihen die Darstellungen zur (Weiter-)Entwicklung des Stellenwertverständnisses bei der Erschließung des Tausenderraum in Klasse 3 untersucht. In Deutschland erfolgt die Erschließung neuer Zahlenräume im Mathematikunterricht der Grundschule meist in festen Schritten: Zwanzigerraum in Klasse 1, Hunderterraum in Klasse 2, Tausenderraum in Klasse 3 und Millionenraum in Klasse 4. Der Übergang vom Hunderter- zum Tausenderraum ist nur ein Ausschnitt aus der Entwicklung des Stellenwertverständnisses, einem langfristigen Prozess über mehrere Schuljahre. Gemäß dem Kompetenzstufenmodell von Herzog et al. (2017) handelt es sich jedoch um einen entscheidenden und keineswegs einfachen Schritt, da im Tausender-

raum – anders als im Hunderterraum – die Idee des wiederholten Bündelns erstmals zum Tragen kommt (Gaidoschik, 2015).

2. Stellenwertverständnis und Orientierung im Zahlenraum

In Bezug auf das Stellenwertverständnis ist die Unterscheidung von zwei Aspekten hilfreich (Herzog et al., 2017; Van de Walle et al., 2023).

- Ein *prozedurales Stellenwertverständnis* umfasst das Lesen und Schreiben von Zahlen, d. h. den Transfer zwischen Zahlwort und Zifferndarstellung in beiden Richtungen, entsprechend den Regeln der Zahlwortbildung. Im Deutschen besteht hierbei die Schwierigkeit, dass in Zahlwörtern – abweichend von der Zifferndarstellung – die Einer vor den Zehnern genannt werden (z. B. siebenhundertdreiundfünfzig).
- Ein *konzeptuelles Stellenwertverständnis* bezieht sich in erster Linie auf die Beziehung zwischen den Stellenwerten, insbesondere auf das Verständnis des Bündelns und Entbündelns. Ihm liegt ein kardinaler Zahlbegriff zugrunde.

Die Orientierung im Zahlenraum bezieht sich auf das Verständnis einer geordneten Zahlenreihe, in der jede Zahl ihren festen Platz besitzt (exakt oder ungefähr), basiert also auf einem ordinalen Zahlbegriff oder einem Längenkonzept von Zahlen (Gaidoschik, 2024).

Das Stellenwertverständnis gilt als zentral für das weitere Mathematiklernen, beispielsweise für das schriftliche und halbschriftliche Rechnen (Verschaffel et al., 2007). Allerdings bereitet es Schülerinnen und Schülern große Schwierigkeiten, sowohl in der Grundschule als auch bis weit in die Sekundarstufe I hinein (Herzog et al., 2017; Humbach, 2008; Moser Opitz, 2013).

3. Darstellungen

Als Darstellungen von Zahlen werden im Folgenden alle externen Repräsentationen von Zahlen durch geeignete Materialien, Diagramme, Zeichen oder Symbole verstanden (Salle et al., 2023). Dies deckt sich mit dem Begriff der Informationsdarbietung bei Schnotz (2001). Davon abzu-

grenzen ist die in der Mathematikdidaktik auch gebräuchliche Verwendung des Terminus Zahldarstellung nur für gegenständliche oder bildliche externe Repräsentationen (beispielsweise bei Fromme, 2017).

Nach Bruner et al. (1971) werden für den Mathematikunterricht traditionell enaktive, ikonische und symbolische Darstellungen mathematischen Wissens unterschieden. Vor einem kognitionspsychologischen Hintergrund betrachtet Schnotz (2001) zwei Kategorien von Darstellungen, die kognitiv jeweils anders verarbeitet und gespeichert werden:

- *Depiktionale Darstellungen* besitzen unmittelbare strukturelle Gemeinsamkeiten mit dem Sachverhalt und sind informational vollständig; Informationen können direkt entnommen werden.
- *Deskriptionale Darstellungen* hingegen sind Beschreibungen mit Hilfe von Symbolsystemen und besitzen keine unmittelbaren strukturellen Gemeinsamkeiten mit dem Sachverhalt; ihre Nutzung erfordert die Kenntnis der Konventionen, die dem Symbolsystem zugrunde liegen.

Depiktionale Darstellungen müssen keine fotorealistischen Abbildungen sein: Wesentlich ist die strukturelle Übereinstimmung von Sachverhalt und Repräsentation, die auch abstrakt sein kann (Schnotz, 2001).

Wendet man die Unterscheidung depiktional vs. deskriptional auf Darstellungen von Zahlen im Tausenderraum an und kombiniert man sie mit der Unterscheidung der beiden Zahlaspekte kardinal vs. ordinal, ergeben sich vier Kategorien von Darstellungen (Tab. 1).

Tab. 1: Beispiele für Darstellungen von Zahlen im Tausenderraum

	kardinal	ordinal
depiktional	unstrukturierte Objekte, Zehnersystem-Material, Punktebilder, Tausenderfeld	Zahlenstrahl, Rechenstrich
deskriptional	Stellentafel, Summenschreibweise (300 + 50 + 2), Zahlenkarten (Seguin-Karten)	Tausendertafel

Eine kardinale depiktionale Darstellung des Tausenderraums besitzt als wesentliches Merkmal, dass sie eine Anzahlvorstellung ermöglicht und – zumindest prinzipiell – ein Auszählen von Objekten möglich ist. Auch ein Zahlenstrahl ist eine depiktionale Darstellung (unabhängig davon, ob eine Skalierung vorhanden und wie sie ausgeführt ist), da er immer die Rangfolge von Zahlen wiedergibt als wesentliches strukturelles Merkmal einer ordinalen Zahldarstellung und gegebenenfalls auch ihren Abstand als wesentliches strukturelles Merkmal eines Längenkonzepts von Zahlen (Gaidoschik, 2024).

Die Einordnung als depiktional oder deskriptional ist nicht absolut: So ist die Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung (Abb. 1) als Vereinfachung von Zehnersystem-Material oder Punktebildern depiktional, weil dann eine Anzahlvorstellung damit verknüpft und prinzipiell ein Auszählen in Schritten (erst Hunderter-, dann Zehner- und schließlich Einerschritte) möglich ist. Wird die Darstellung hingegen als Darstellung von Zahlen ohne jeden Bezug zu Zehnersystem-Material oder Punktebildern eingeführt, besitzen Quadrate, Striche und Punkte eher den Charakter von Symbolen, und die Darstellung ist demnach deskriptional (Abschn. 6.2).

Abb. 1: Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung von 346 (links kanonisch, rechts nicht-kanonisch)

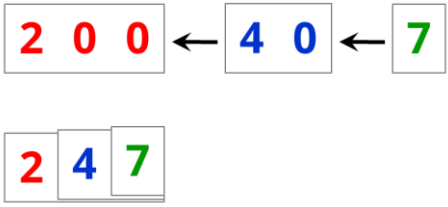


Abb. 2: Zahlenkarten

Bei den als Montessori-Material bekannten Seguin-Karten (Zahlenkarten) entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl aus dem Übereinanderschieben von Karten mit Vielfachen der Stellenwerte (Abb. 2). Es handelt

sich hierbei um eine deskriptionale Darstellung. Ob die Karten als Material vorliegen und damit hantiert werden kann oder ob sie abgebildet sind und das Schieben in der Vorstellung passiert, ist hierfür unerheblich.

Im schulischen Kontext gibt es sowohl depiktionale Darstellungen (Abb. 1 rechts) als auch deskriptionale Darstellungen wie 2H 14Z 6E, die nicht den Konventionen des dezimalen Stellenwertsystems entsprechen und deshalb als unkonventionell (Mathe inklusiv mit PIKAS, o.J.; Schipper et al., 2017; Schulz & Walter, o.J.) oder nicht-kanonisch (Herzog et al., 2017) bezeichnet werden. Sie besitzen eine große Bedeutung sowohl für den Lernprozess als auch für die Diagnose, weil sie ein Bündeln erfordern, da ein schematisches, ziffernweises Übertragen nicht möglich ist (Schipper et al., 2017; Scherer & Moser Opitz, 2010; Schulz & Wartha, 2021; Van de Walle et al., 2023).

Generell gelten das Arbeiten mit geeigneten externen Darstellungen und insbesondere das Ausführen von Darstellungswechseln als zentral für die Entwicklung des Stellenwertverständnisses (Schulz & Wartha, 2021; Van de Walle et al., 2023). Gleichzeitig ist aus dem mathematischen Anfangsunterricht bekannt, dass das Arbeiten mit Darstellungen im Mathematikunterricht alles andere als unkritisch ist: Da Kinder mathematische Darstellungen individuell deuten (Deutscher, 2012; Söbbeke, 2005), müssen gemeinsame Deutungen im Unterricht ausgehandelt werden. Darstellungen sollten deshalb sorgsam eingeführt werden und sind zunächst selbst Lerngegenstand, bevor sie zur Lernhilfe und zum Kommunikationsmittel werden können; weiter muss auch die Ablösung von Darstellungen entsprechend unterstützt werden (Scherer & Moser Opitz, 2010).

4. Ziel der Studie

Die Zielsetzung der vorliegenden Studie ergibt sich daraus, dass erstens kardinale Darstellungen und damit verbundene Darstellungswechsel von zentraler Bedeutung für die Entwicklung des Stellenwertverständnisses sind, und dass zweitens Schulbücher eine wesentliche Grundlage für den Mathematikunterricht bilden. Es lässt sich folgende Forschungsfrage formulieren:

Welche Darstellungen zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses im Tausenderraum treten in Schulbüchern für Klasse 3 auf und in welcher Weise werden sie verwendet?

Die Studie fokussiert somit auf Darstellungen zur Entwicklung eines prozeduralen und konzeptuellen Stellenwertverständnisses (Abschn. 2), während ordinale Darstellungen wie der Zahlenstrahl oder der Rechenstrich, die auf die Orientierung im Tausenderraum zielen, außen vor bleiben.

5. Untersuchungsdesign

Die Untersuchung wurde als qualitative Inhaltsanalyse in der Form einer inhaltlich-strukturierenden Analyse durchgeführt (Mayring & Fenzl, 2022; Schreier, 2014).

Die Datenbasis umfasst alle 16 in Baden-Württemberg zugelassenen Schulbücher für Klasse 3 in der im September 2024 vorliegenden Ausgabe. Untersucht wurde jeweils das Buch für die Schülerinnen und Schüler bzw. das Themenheft, das sich auf die Erschließung des Tausenderraums bezieht. Darunter sind sowohl Bücher für die Ausleihe als auch Bücher als Verbrauchsmaterial, in welche die Schülerinnen und Schüler hineinschreiben können. Unabhängig davon wird im Folgenden stets einheitlich von Schulbüchern gesprochen. Nicht betrachtet wurden darüberhinausgehende Materialien wie beispielsweise Begleitmaterialien für die Lehrkraft, Förderhefte oder Lernkarteien, aufgrund der Annahme, dass diese zwar zusätzliche Aufgaben liefern, aber keine grundsätzlich anderen Darstellungen.

Zunächst wurden die zu kodierenden Lerngelegenheiten in den Schulbüchern bestimmt. Einbezogen wurden jeweils jene Abschnitte, die auf die erstmalige Erschließung des Tausenderraums zielen, je nach Schulbuch (alle sind nach dem Seiten- oder Doppelseitenprinzip aufgebaut) zwischen 7 und 21 Seiten, insgesamt 205 Seiten. Nicht analysiert wurden Abschnitte, die sich entweder noch auf den Hunderterraum beziehen, etwa eine Wiederholung zu Beginn des Schulbuchs, oder schon explizit das Rechnen im Tausenderraum ansprechen. Anschließend wurden die Kodiereinheiten festgelegt: Jede Aufgabe (entsprechend der Nummerierung im Schulbuch, einschließlich zugehöriger Kästen oder Bilder) bil-

dete eine Kodiereinheit. Elemente ohne Aufgabennummer wie überblickshafte Einführungen oder Teaser wurden ebenfalls kodiert, wenn sie – z. B. durch ein Symbol oder einen Hinweis in der Fußzeile – auf unterrichtliche Aktivitäten verweisen (im Sinne eines erweiterten Aufgabenbegriffs; Leuders, 2014). Nicht kodiert wurden demgegenüber Elemente ohne Aufgabennummer, wenn sie lediglich einen illustrierenden Charakter haben oder wenn sie zu einer der nachfolgenden Aufgabe gehören (dann wurden sie dort erfasst). Einzelne Aufgaben, die sich auf nicht relevante Lerninhalte beziehen (z. B. Kopfrechnen im Hunderterraum oder Geometrie), wurden übersprungen. Auf diese Weise wurden insgesamt 816 Aufgaben kodiert, je nach Schulbuch zwischen 28 und 82 Aufgaben.

Die Kodierung erfolgte zweistufig: In einem ersten Schritt wurde dichotom kodiert, ob eine Darstellung auftritt oder nicht; Mehrfachkodierungen beim Auftreten mehrerer Darstellungen innerhalb einer Aufgabe waren möglich. Zudem wurden stets Auffälligkeiten oder Besonderheiten der jeweiligen Darstellung notiert. Im Hinblick auf den zweiten Teil der Forschungsfrage zeigte sich der Bedarf nach einer ergänzenden, ebenfalls dichotomen Kodierung: Es wurde erfasst, ob in einer Aufgabe

- bei Darstellungen unstrukturierter Objekte eine Bündelung vorgegeben ist,
- die Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung explizit mit Punktebildern oder dem Zehnersystem-Material verknüpft wird,
- nicht-kanonische Darstellungen auftreten,
- bei der Verwendung mehrfarbiger Zahlenkarten (Seguin-Karten) Abweichungen von der bei Montessori beschriebenen Darstellung auftreten, etwa Karten mit „0“ oder „00“,
- ein Hinweis auf die inverse Zahlwortbildung gegeben wird, z. B. expliziter Hinweis oder farbige Markierung der jeweiligen Bestandteile.

Das Kategoriensystem wurde vorab aufgrund von Erfahrungswissen und Literatur erstellt und im Laufe der Kodierung ergänzt. Es umfasste insgesamt 37 Merkmale. Alle Aufgaben wurden von zwei Personen unabhängig voneinander kodiert; bei Abweichungen erfolgte eine Konsensentscheidung. Um die Reliabilität der Kodierung zu überprüfen, wurde für sechs Schulbücher mit insgesamt 352 von 816 Kodiereinheiten (43,1% der Kodiereinheiten) die Interkoder-Reliabilität berechnet. Cohens

Kappa lag für vier Merkmale zwischen $\kappa = 0{,}626$ und $\kappa = 0{,}722$; für die 33 anderen Merkmale galt $\kappa > 0{,}75$. Nach Wirtz und Caspar (2002, S. 59 f.) können Werte zwischen 0,6 und 0,75 als gute und ab 0,75 als sehr gute Übereinstimmung gewertet werden.

Die Kodierung hatte in erster Linie heuristischen Charakter, d. h. sie sollte das Datenmaterial erschließen und die weitere Beschreibung und Analyse der betreffenden Schulbuchabschnitte leiten und strukturieren.

6. Ergebnisse

6.1 In Schulbüchern verwendete kardinale Darstellungen

Im Sinne einer Bestandsaufnahme wird zunächst beschrieben, welche Darstellungen zur Einführung in den Tausenderraum in Schulbüchern vorkommen. Einige treten in allen Schulbüchern auf: die Zifferndarstellung, die Darstellung als Zahlwort, in einer Stellentafel mit Ziffern und als Summe (z. B. 500 + 70 + 3 oder 5H + 7Z + 3E). Andere finden sich wiederum nur in einem Teil der Schulbücher: Darstellungen als unstrukturierte Objekte, mit Zehnersystem-Material, als Quadrat-Punkt-Strich-Darstellung, mittels Punktebildern, am Tausenderfeld, in einer Stellentafel mit Objekten und mittels Zahlenkarten (Anhang 10.1 für einen Überblick).

6.2 Charakterisierung ausgewählter kardinaler Darstellungen

Im Folgenden wird für ausgewählte kardinale Darstellungen, die auf das (prozedurale oder konzeptuelle) Stellenwertverständnis zielen, genauer beschrieben, in welcher Weise sie in Schulbüchern verwendet werden. Nicht berücksichtigt werden dabei Darstellungen wie die Summenschreibweise oder die Stellentafel mit Ziffern, da diese in allen Schulbüchern vorkommen. Außerdem wird die Tausendertafel beschrieben, um sie vom Tausenderfeld abgrenzen zu können, dem sie – bei oberflächlicher Betrachtung – sehr ähnlich ist.

Unstrukturierte Objekte

Unstrukturierte Objekte können sowohl in Form gezielt arrangierter Konfigurationen (z. B. Bohnen, Nägel, Steckwürfel, Münzen, Reißzwecke, einzelne Holzwürfel aus dem Dienes-Material) als auch in eher der Lebenswelt zuzuordnenden Fotos (z. B. Schokolinsen, fliegende oder auf

einer Stromleitung sitzende Vögel) vorkommen. Da sie eine Anzahlerfassung erlauben und ein zählendes Vorgehen grundsätzlich möglich ist, handelt es sich um eine depiktionale Darstellung. Mit zwei Ausnahmen (*Fredo*; *Super M*) finden sich unstrukturierte Objekte in allen Schulbüchern.

Dabei können drei Aufgabenformate unterschieden werden:

- Aufgaben zur Anzahlbestimmung von unstrukturierten Objekten am Beginn der Erschließung des Tausenderraums, wobei sich keine Hinweise finden, wie die Anzahlbestimmung erfolgen soll (*Das Mathebuch*; *Eins plus*)
- Aufgaben zur Erarbeitung der (wiederholten) Zehnerbündelung, ebenfalls am Beginn der Erschließung des Tausenderraums: Drei Schulbücher verwenden Einerwürfel des Dienes-Materials und Steckwürfel als unstrukturierte Objekte, um ausgehend davon den Aufbau des Zehnersystem-Materials zu thematisieren (*eins, zwei, drei*; *Mathetiger*; *Zahlenzauber*). Die (wiederholte) Zehnerbündelung von unstrukturierten Objekten als Grundlage einer schnellen und effektiven Anzahlbestimmung wird zudem thematisiert, wenn die unstrukturierten Objekte bereits gebündelt abgebildet werden (*Das Mathebuch*; *Das Zahlenbuch*; *Einstern*; *eins, zwei, drei*; *Flex und Flo*; *Mathetiger*; *MiniMax*; *Nussknacker*; *Welt der Zahl*). In einem Fall (*Nussknacker*) wird auch eine andere Bündelung dargestellt.
- Schätzaufgaben, sowohl am Anfang als auch im weiteren Verlauf der Erschließung des Tausenderraums (*Das Zahlenbuch*; *Denken und Rechnen*; *Einstern*; *Jo-Jo*; *Matherad*; *Mathetiger*; *Nussknacker*): Hier sind die unstrukturierten Objekte ohne Bündelung repräsentiert. Die Abbildungen bei den Schätzaufgaben geben Hilfen zum Schätzen, indem beispielsweise ein Raster vorgeben ist, welches die Gesamtmenge so unterteilt, dass es genügt, die Anzahl in einem der Felder zu bestimmen (Ausnahme: *Matherad*).

Zehnersystem-Material

Unter Zehnersystem-Material werden das Dienes-Material und strukturähnliche Darstellungen wie das Goldene Perlenmaterial nach Montessori sowie Darstellungen von Steckwürfeln, die zu Zehnerstangen und Hunderterplatten zusammengesetzt sind, subsumiert. Es sind depiktio-

nale Darstellung, da sie eine Anzahlvorstellung ermöglichen und ein Abzählen – zumindest prinzipiell – möglich ist. In zwölf Schulbüchern wird das Dienes-Material verwendet, dabei einmal als solches bezeichnet (*Fredo*), ansonsten – sofern es einen Namen dafür gibt – als Legematerial (*Eins plus*), strukturiertes Material (*Nussknacker*) oder Mehrsystemblöcke (*Mathetiger*; *MiniMax*). In zwei dieser Bücher ist das Dienes-Material durchgängig mehrfarbig (*Das Mathebuch*; *Eins plus*). Das goldene Perlenmaterial (*Matherad*) und farbige Darstellungen von Steckwürfeln (*Das Mathebuch*) kommen je einmal vor. Zwei Schulbücher verwenden kein Zehnersystem-Material, sondern stattdessen Punktebilder (*Das Zahlenbuch*; *Flex und Flo*).

Das Zehnersystem-Material dient entweder direkt als Einstieg in den Tausenderraum (*Denken und Rechnen*; *Fredo*; *Super M*; *Zahlenzauber*), oder es wird nach vorangegangenen Darstellungen unstrukturierter Objekte eingesetzt (*Das Mathebuch*; *Eins plus*; *Einstern*; *Jo-Jo*; *Matherad*; *Mathetiger*; *MiniMax*; *Nussknacker*; *Welt der Zahl*). Es wird in verschiedensten Weisen angeordnet (Anhang 10.2). Deutlich abweichend davon ist die Zahldarstellung durch einen Tausenderwürfel mit Aussparungen (*Super M*).

Das Zehnersystem-Material fungiert in einigen Büchern als Veranschaulichung in ein oder zwei Aufgaben (*Das Mathebuch*; *Eins plus*; *Jo-Jo*; *Matherad*; *Mathetiger*; *MiniMax*), während in anderen seine Struktur thematisiert und ein Arbeiten damit – insbesondere das Bündeln und Entbündeln – angeregt wird (*Denken und Rechnen*; *Einstern*; *eins, zwei, drei*; *Fredo*; *Nussknacker*; *Super M*; *Welt der Zahl*; *Zahlenzauber*).

Die Verknüpfung des Zehnersystem-Materials mit der Zifferndarstellung erfolgt

- überwiegend mittels Stellentafel (*Das Mathebuch*; *Denken und Rechnen*; *Eins plus*; *Einstern*; *eins, zwei, drei*; *Jo-Jo*; *Matherad*; *MiniMax*; *Nussknacker*; *Super M*; *Zahlenzauber*),
- mittels zum Zehnersystem-Material gelegten Zahlenkarten (*Denken und Rechnen*; *eins, zwei, drei*; *MiniMax*; *Zahlenzauber*),
- durch ein Zusammensetzen der Stellenwerte als Summe (*Das Mathebuch*; *eins, zwei, drei*; *Fredo*; *Jo-Jo*; *Mathetiger*; *Welt der Zahl*).

Punktebilder

Punktebilder sind ebenfalls eine depiktionale Darstellung. Sie werden aus Hunderterfeldern, Zehnerstreifen und Einerplättchen gelegt (Abb. 3) und weisen diesbezüglich eine strukturelle Gemeinsamkeit mit dem Zehnersystem-Material auf. Allerdings sind Punktebilder stets flächig, da ein Tausender durch nebeneinander gelegte Hunderterfelder realisiert wird, während beim Zehnersystem-Material ein Tausender im Allgemeinen dreidimensional als Würfel dargestellt wird.

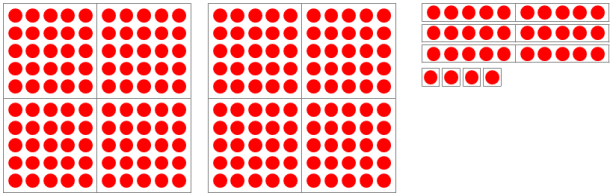


Abb. 3: Punktebilder im Tausenderraum

Punktebilder werden in drei Schulbüchern verwendet. In den beiden Schulbüchern, die kein Zehnersystem-Material verwenden (*Das Zahlenbuch*; *Flex und Flo*), sind Punktebilder die zentrale depiktionale Darstellung zur Erschließung des Tausenderraums: Die Struktur des Materials wird thematisiert und die Punktebilder werden mit der Zifferndarstellung über ein Zusammensetzen der Stellenwerte als Summe verknüpft. Unterschiede zeigen sich jedoch in der Anordnung der Darstellung (Anhang 10.2) und der Weiterarbeit damit. In einem der beiden Schulbücher (*Das Zahlenbuch*) wird in der Fortsetzung auch mit dem Tausenderfeld mit Abdeckwinkel gearbeitet. Ein drittes Schulbuch (*Das Mathebuch*) setzt zunächst andere Darstellungen wie das Dienes-Material ein, bevor im weiteren Verlauf auch Punktebilder vorkommen. Diese werden als Punktekarten bezeichnet und ohne Einführung in ihre Struktur verwendet. Sie dienen der Einführung der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung.

Tausenderfeld

Das Tausenderfeld findet sich in sechs Schulbüchern. Es wird als solches bezeichnet (*Das Zahlenbuch*; *Nussknacker*; *Super M*; *Zahlenzauber*), als Tausenderstreifen (*Jo-Jo*) oder als Tausenderleporello (*Matherad*). Beim Tausenderfeld handelt es sich um eine depiktionale Darstellung, die als

Aneinanderreihung von zehn Hunderterfeldern entsteht; Punktebilder aus Hunderterfeld, Zehnerstreifen und Einerplättchen können damit in einem Tausenderfeld aufgehen (Abb. 4).

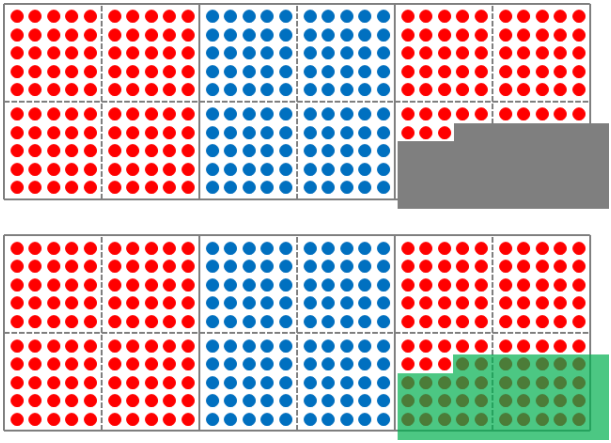


Abb. 4: Ausschnitt des Tausenderfeldes mit undurchsichtigem und transparentem Abdeckwinkel

Mit dem Tausenderfeld wird vor allem der Kardinalzahlaspekt betont, indem (An-)Zahlen mit Hilfe eines Abdeckwinkels dargestellt werden. Es kann als alternative Darstellung zu Punktebildern gesehen werden. Die Darstellung des Zahlbildes am Tausenderfeld unterscheidet sich von der Darstellung mit Hilfe von Punktebildern, wenn das Tausenderfeld mit einem transparenten Abdeckwinkel verwendet wird (*Matherad*; *Nussknacker*). Dann ist neben dem Zahlbild auch die Visualisierung der Ergänzung zum nächsten Hunderter oder Tausender gegeben.

Das Tausenderfeld wird innerhalb des Lehrgangs am Übergang vom konzeptuellen Stellenwertverständnis zur Orientierung im Tausenderraum eingesetzt, vor der Verwendung der Tausendertafel oder des Zahlenstrahls. In einem der beiden Schulbücher, die Punktebilder für die Erschließung des Tausenderraums nutzen, wird das Tausenderfeld als Ablösung dieser eingesetzt (*Das Zahlenbuch, S. 12*). In Schulbüchern, die Zehnersystem-Material nutzen, dient das Tausenderfeld als weitere Darstellung für bereits bekannte Aufgabenformate.

Tausendertafel

Dem Tausenderfeld auf den ersten Blick sehr ähnlich ist die Tausendertafel: Sie beinhaltet keine Punkte, sondern die Zifferndarstellung der Zahlen. Es handelt sich deshalb um eine ordinale deskriptionale Darstellung, da die Anordnung der Zahlen nicht die Kleiner-Relation widerspiegelt (z. B. im Unterschied zum Zahlenstrahl, einer ordinalen depiktionalen Darstellung). Insbesondere sagen die Abstände zwischen zwei Kästchen nichts über den Abstand zweier Zahlen aus (horizontal: 1; vertikal: 10; hinzu kommen Sprünge beim Übergang von einem Zehner zum nächsten und von einem Hunderter zum nächsten). Die Tausendertafel wird in zehn Schulbüchern eingesetzt (*Denken und Rechnen*; *Einstern*; *eins, zwei, drei*; *Flex und Flo*; *Jo-Jo*; *Matherad*; *Mathetiger*; *MiniMax*; *Nussknacker*; *Super M*).

In einem Schulbuch (*Matherad*) finden sich Mischformen von Tausenderfeld und Tausendertafel, die sowohl kardinale als auch ordinale Aspekte aufweisen, da im Tausenderfeld jeder zehnte und jeder hundertste Punkt farblich abgesetzt sind. Auch folgen auf Aufgaben zur (kardinalen) Zahldarstellung mittels Abdeckwinkel am Tausenderfeld unmittelbar solche, in denen einzelne Punkte als Platz einer Zahl ordinal gedeutet werden (z. B. „Finde drei Zahlen, die […] in der 2. Spalte stehen." *Matherad*, S. 21).

Die Benennung von Tausenderfeld und Tausendertafel ist über die Schulbücher hinweg uneinheitlich. So wird als Tausenderstreifen einmal das Tausenderfeld bezeichnet (*Jo-Jo*) und einmal die Tausendertafel (*Denken und Rechnen*).

Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung

Die Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung wird mit einer Ausnahme (*Denken und Rechnen*) in allen Schulbüchern verwendet und häufig als Zahlbild bezeichnet, gelegentlich auch als Geheimschrift (*Matherad*; *MiniMax*; *Nussknacker*; *Welt der Zahl*). Die Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung folgt

- auf das Zehnersystem-Material (*Eins plus*; *Einstern*; *Fredo*; *Jo-Jo*; *Matherad*; *Mathetiger*; *Super M*; *Welt der Zahl*),
- auf Punktebilder (*Das Mathebuch*; *Das Zahlenbuch*; *Flex und Flo*),
- auf das Tausenderfeld mit Abdeckwinkel (*Nussknacker*),

da sie aus diesen Darstellungen abgeleitet werden kann. Sie kann überwiegend als depiktional eingeordnet werden, da sie als vereinfachte zeichnerische Darstellung der vorausgehenden Darstellungen eingeführt wird und somit eine Verknüpfung mit diesen erfolgt (Abschn. 3). Typisch hierfür sind Aufgaben, die einen expliziten Darstellungswechsel zwischen der vorausgehenden Darstellung und der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung anregen. Es gibt allerdings eine Ausnahme (*Einstern*), bei der keine explizite Verknüpfung der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung erfolgt, sodass sie deskriptional erscheint.

In sieben Schulbüchern gibt es Unterschiede in der Anordnung des Zehnersystem-Materials und der Anordnung der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung (*Das Mathebuch*, *Eins Plus*, *Matherad*, *MiniMax*, *Nussknacker*, *Super M*, *Zahlenzauber*). In zwei Schulbüchern (*Das Zahlenbuch*; *Zahlenzauber*) findet auch innerhalb des Schulbuches zwischen der ersten Einführung und dem Arbeiten mit der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung ein Umordnen dieser statt (Anhang 10.2).

In vier Schulbüchern wird die Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung durchgängig mehrfarbig verwendet (*Eins plus*; *Jo-Jo*; *Matherad*; *Mathetiger*), wodurch in einem Schulbuch (*Eins plus*) sowohl das Zehnersystem-Material als auch die Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung durchgängig mehrfarbig verwendet werden. In zwei Schulbüchern ist die Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung anfangs mehrfarbig und später einfarbig (*Fredo*; *Welt der Zahl*). Ansonsten wird die Darstellung immer einfarbig verwendet.

Zahlenkarten

Die Zahlenkarten sind eine deskriptionale Darstellung. Dabei werden die typischen Montessori-Farben (Einer: grün; Zehner: blau; Hunderter: rot) in einigen Schulbüchern übernommen (*Einstern*; *Fredo*; *Matherad*; *MiniMax*; *Super M*); es finden sich aber auch andere Zuordnungen der Montessori-Farben (*Das Mathebuch*; *eins, zwei, drei*; *Zahlenzauber*) oder andere Farben (*Denken und Rechnen*). Die jeweiligen Farben werden innerhalb eines Schulbuches konsistent für alle mehrfarbigen Darstellungen verwendet. Weiter kommen auch einfarbige Darstellungen vor (*Das Zahlenbuch*; *Eins plus*). Es wird, wenn eine Benennung erfolgt, überwiegend die Bezeichnung als Zahlenkarten verwendet; eine Ausnahme bildet die Bezeichnung als Karten (*Einstern*).

Bezüglich der Handhabung der Karten lehnen sich einige Schulbücher eng an Montessori an: Die Karten werden rechtsbündig übereinander geschoben, und dies wird auch im Schulbuch so angeleitet oder dokumentiert. Dabei gibt es keine Zahlenkarte mit „0“ oder „00“, da für nicht besetzte Stellenwerte keine Karte verwendet wird und sich die Besetzungen aus der darunterliegenden Zahlenkarte ergibt (*Das Mathebuch*; *Denken und Rechnen*; *Eins plus*; *Einstern*; *eins, zwei, drei*; *Fredo*; *Matherad*; *Zahlenzauber*). Es gibt aber auch Abweichungen davon, so

- treten Zahlenkarten mit „0“ auf (*MiniMax*; *Super M*),
- ist beim Transfer von der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung zu abgebildeten Zahlenkarten auch „0“ oder „00“ in vorgegebene Felder einzutragen (*MiniMax*),
- kommen beim Umgang mit Zahlenkarten ausschließlich Zahlen vor, bei denen alle Stellen von Null verschieden sind (*Fredo*),
- werden die Zahlenkarten nicht übereinander geschoben (Abb. 2), sondern ausschließlich untereinander abgebildet (*Das Zahlenbuch*).

Zahlenkarten kommen typischerweise an zwei verschiedenen Stellen bei der Erschließung des Tausenderraums vor:

- Sie können als ein Bindeglied zwischen depiktionalen Darstellungen (Zehnersystem-Material, Punktebilder, Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung) und weiterführenden deskriptionalen Darstellungen (Stellenwerttafel mit Ziffern bzw. Zifferndarstellung) dienen (*Das Zahlenbuch*; *Denken und Rechnen*; *Einstern*; *MiniMax*; *Super M*) und dann auch schon sehr früh bei der Erschließung des Tausenderraums auftreten *(Denken und Rechnen*).
- Sie können als Hilfe beim Lesen und Schreiben von Zahlen (Darstellungswechsel von der Zifferndarstellung zum Zahlwort und umgekehrt) verwendet werden (*Das Mathebuch*; *Denken und Rechnen*; *Einstern*; *eins, zwei, drei*; *Fredo*; *Einstern*; *Zahlenzauber*), da sie den Fokus auf die Notation mehrstelliger Zahlen von links nach rechts lenken (Schipper et al., 2017).

Stellentafel mit Objekten

Werden Objekte wie gleichfarbige Plättchen oder Nüsse in die Stellentafel gelegt, gibt ihre Position den Stellenwert und ihre Anzahl den Ziffernwert an. Es handelt sich um eine deskriptionale Darstellung, die eine

Kenntnis der Konventionen des dezimalen Stellenwertsystems voraussetzt. Sie findet sich in allen zwölf Büchern, die sie verwenden, nicht am Beginn der Erschließung des Tausenderraums, sondern zu einem späteren Zeitpunkt. Es gibt im Wesentlichen zwei Aufgabenformate:

- das Beschreiben, wie sich das Verschieben einzelner Objekte in eine andere Spalte oder das Hinzufügen oder Wegnehmen von Objekten auswirkt,
- kombinatorische Aufgabenstellungen (das Finden aller Zahlen, die mit einer bestimmten Anzahl von Objekten gelegt werden können), die u. a. auf das systematische Darstellen möglicher Lösungen zielen.

Diese Aufgabenformate finden sich stets als eine Aufgabensequenz an einer Stelle im Schulbuch. Anders als die Stellentafel mit Ziffern ist ihr Pendant mit Objekten keine zentrale Darstellung bei der Erschließung des Tausenderraums und auch keine Vorstufe dazu, sondern eher eine Vertiefung.

6.3 Weitere Ergebnisse

Abschließend wird dargelegt, welche Hinweise zum Lesen und Schreiben von Zahlen gegeben werden, die ein Aspekt des prozeduralen Stellenwertverständnisses sind, und in welcher Weise nicht-kanonische Darstellungen auftreten, die auf das konzeptuelle Stellenwertverständnis zielen.

Hinweise zum Lesen und Schreiben von Zahlen

Die Hälfte der Bücher gibt Hinweise zum Lesen und Schreiben von Zahlen, indem die Stellenwerte sowohl in der Zifferndarstellung als auch im Zahlwort farbig hervorgehoben werden (*Das Mathebuch*; *Das Zahlenbuch*; *Einstern*; *eins, zwei, drei*; *Fredo*; *Das Matherad*; *Mathetiger*; *Welt der Zahl*). Zusätzlich gibt es

- explizite Hinweise in Textform, ausgehend vom Zahlwort („Dreihundertzweiundvierzig. Erst die Hunderter schreiben, dann die Zehner und dann die Einer“; *Das Zahlenbuch*, S. 26),
- eine Herleitung ausgehend von den Bestandteilen des Zahlworts (z. B. zweihundert und vierzig und drei), die zum Dienes-Material (*eins, zwei, drei*) oder zu Zahlenkarten (*Einstern*) gelegt werden.

In den anderen acht Bücher finden sich keine Hinweise zum Lesen und Schreiben von Zahlen.

Nicht-kanonische Darstellungen

Neun Schulbücher enthalten auch nicht-kanonische Darstellungen, punktuell in einer bis sechs Aufgaben (*Das Mathebuch*; *Das Zahlenbuch*; *Denken und Rechnen*; *Flex und Flo*; *Fredo*; *Matherad*; *Mathetiger*; *MiniMax*; *Welt der Zahl*). Eine nicht-kanonische Darstellung tritt am häufigsten in einer Stellenwertdarstellung auf (*Das Mathebuch*; *Das Zahlenbuch*; *Denken und Rechnen*; *Flex und Flo*; *Fredo*; *Matherad*; *MiniMax*; *Welt der Zahl*), weiter beim Zehnersystem-Material (*Fredo*; *Matherad*; *Mathetiger*; *MiniMax*; *Welt der Zahl*), bei Punktebildern (*Das Zahlenbuch*), bei der Stellentafel mit Ziffern (*Flex und Flo*) oder Objekten (*Matherad*), bei unstrukturierten Objekten, die bereits gebündelt abgebildet werden (*Das Zahlenbuch*) und bei der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung (*MiniMax*). Während nicht vollständig gebündelte Darstellungen unstrukturierter Objekte oder von Einerwürfeln des Dienes-Materials auf die Erarbeitung der wiederholten Zehnerbündelung zielen, treten nicht-kanonische Darstellungen später auf, wenn die Grundlagen des dezimalen Stellenwertsystems bereits vorliegen. Beide Aspekte lassen sich aber nicht eindeutig voneinander trennen.

7. Diskussion der Ergebnisse

7.1 Ziel der Analyse und methodisches Vorgehen

Ziel dieser Studie war es, mittels einer qualitativen Inhaltsanalyse die 16 für die dritte Klasse in Baden-Württemberg zugelassenen Schulbücher im Hinblick auf Darstellungen zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses im Tausenderraum zu untersuchen. Die Studie bietet einen Überblick über die in den Schulbüchern vorkommenden Darstellungen sowie einen Vergleich zwischen den verschiedenen Schulbüchern. Zudem wird aufgezeigt, in welcher Abfolge die Darstellungen eingesetzt werden und welche Rolle sie innerhalb des jeweiligen Lehrgangs einnehmen. Auf den ersten Blick zeigt sich, dass es mehrere gängige Darstellungen gibt, die in vielen Schulbüchern verwendet werden. Erst eine vertiefte Analyse macht Unterschiede in der Verwendung dieser Darstellungen zwischen Schulbüchern sichtbar. Dies deckt sich mit Befunden in anderen Bereichen (z. B. Lenz & Wittmann, 2023).

Die Studie weist mehrere Limitationen auf. Zum einen wurde ausschließlich das jeweilige Schulbuch analysiert und nicht das gesamte Materialpaket. Zum anderen beschränkte sich die Untersuchung auf jenen Abschnitt im Schulbuch, der explizit die Erschließung des Tausenderraums zum Ziel hat, wohl wissend, dass bereits in Klasse 2 sowie im weiteren Verlauf von Klasse 3 und 4 Lerngelegenheiten für das Stellenwertverständnis bestehen können (z. B. in den Abschnitten zum halbschriftlichen und schriftlichen Rechnen). Zudem lag der Fokus der Analyse auf einzelnen Darstellungen und nicht auf deren Zusammenwirken oder auf übergreifenden Gesamtkonzepten. Es können somit auch nur begrenzt Aussagen über die Kohärenz von Darstellungen getroffen werden, insbesondere nicht über die Schuljahre hinweg.

7.2 Darstellungen in Schulbüchern aus mathematikdidaktischer Perspektive

Zwar sind Schulbücher nur ein Element des Lernangebots (Helmke, 2022), und natürlich ist ein Schulbuch weder eine direkte Anleitung für den Unterricht noch kann es alle Aspekte einer Lerngruppe berücksichtigen. Dennoch erscheinen manche Aspekte in den Schulbüchern angesichts des mathematikdidaktischen Status quo kritisch.

In der mathematikdidaktischen Literatur besteht Konsens, dass die sorgfältige Einführung von Darstellungen und das intensive Arbeiten damit grundlegend sind (Padberg & Benz, 2021; Scherer & Moser Opitz, 2010; Schulz & Wartha, 2021; Van de Walle et al., 2023). Einige Schulbücher verwenden eine Vielzahl von Darstellungen, insbesondere im Hinblick auf das konzeptuelle Stellenwertverständnis. Dabei setzen sie manche Darstellungen (beispielsweise das Zehnersystem-Material) jedoch nur für wenige Aufgaben ein oder es fehlt eine Einführung. Weiter gibt es nur in neun der 16 Schulbücher nicht-kanonische Darstellungen, trotz ihrer Bedeutung für den Lernprozess (Schipper et al., 2017; Scherer & Moser Opitz, 2010; Schulz & Wartha, 2021; Van de Walle et al., 2023). Generell wären mehr Aufgaben mit nicht-kanonischen Darstellungen wünschenswert, da diese ein schematisches Vorgehen nicht unterstützen und deshalb Potenzial zur kognitiven Aktivierung haben.

Es bestehen Inkonsistenzen bezüglich der Darstellungen innerhalb der Schulbücher, etwa unterschiedliche Anordnungen von Zehnersystem-Material, Punktebildern sowie der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung

(Anhang 10.2). Solche Abweichungen können aus fachdidaktischen Überlegungen resultieren oder manchmal unvermeidlich sein. Sie sollten jedoch stets gezielt vorgenommen werden und den Lernprozess unterstützen. Darüber hinaus zeigen sich Inkonsistenzen bezüglich der Darstellungen zwischen verschiedenen Schulbüchern, beispielsweise in Bezug auf die Anordnung von Elementen (Anhang 10.2) oder die unterschiedliche Bedeutung von Farben beim Dienes-Material, der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung und den Zahlenkarten. Alle diese Inkonsistenzen müssen von Lehrkräften erkannt und berücksichtigt werden, insbesondere wenn Darstellungen aus mehreren Schulbüchern verwendet werden, um Schülerinnen und Schüler adäquat begleiten können.

Weiter finden sich Mischformen von Darstellungen. Ein Beispiel hierfür sind Zahlenkarten mit „0“ und „00“, die dem Prinzip der Seguin-Karten, das mit der Zahlwortbildung korrespondiert, zuwiderlaufen. Auch verschwimmen kardinale und ordinale Darstellungen: Ein „gleitender Übergang“ vom Tausenderfeld zur Tausendertafel mag als Unterstützung für die Lernenden gedacht sein, kann aber auch zu Problemen führen, wenn Arbeitsweisen unhinterfragt von einer Darstellung zur anderen übertragen werden (zu Hunderterfeld und -tafel: Gaidoschik, 2015). Die Gefahr von Mischformen und damit verbundenen wechselnden Deutungen der Darstellung ist, dass sie zu Fehlern führen können, weil nicht erkennbar wird, dass eine auf den ersten Blick sehr ähnliche Darstellung plötzlich anders gedeutet wird (Schulz & Wartha, 2021). Die über die verschiedenen Schulbücher hinweg auftretende Vielfalt an Bezeichnungen erschwert zudem ein Verständnis dafür, welche Darstellung aus fachdidaktischer Sicht darunter verstanden wird (siehe z. B. Tausenderstreifen). Dies kann zu Herausforderungen führen, wenn Materialien aus mehreren Schulbüchern genutzt werden.

Mehrfarbige Darstellungen werden in der fachdidaktischen Literatur (Schipper et al., 2017) sowohl mit Blick auf ihr Unterstützungspotenzial als auch hinsichtlich möglicher Lernhindernisse betrachtet. So können sie beim Erlernen der Zahlwörter eine wichtige Hilfe sein und auf die von der Zifferndarstellung abweichende Reihenfolge hinweisen. Problematisch erscheint allerdings die durchgängige Verwendung mehrfarbiger Darstellungen, wie dies in einigen Schulbüchern bei der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung bzw. dem Dienes-Material der Fall ist. Die Farben können dann zum dominanten Merkmal werden und den Blick auf inhaltliche Zusammenhänge verstellen. Wenn beispielsweise beim Dienes-

Material eine Zehnerstange und zehn Einerwürfel unterschiedliche Farben haben, kann dies für das Verständnis des Bündelns oder Entbündelns hinderlich sein.

Darstellungen, die das Lesen und Schreiben dreistelliger Zahlen (d. h. das prozedurale Stellenwertverständnis) unterstützen, bekommen in manchen Schulbüchern wenig Raum. Dort tritt die Zifferndarstellung praktisch von Beginn an auf, ohne explizite Einführung oder Vorübungen oder Hilfen in Bezug auf die inverse Zahlwortbildung. Dies kann für Schülerinnen und Schüler, die mit dem Lesen und Schreiben dreistelliger Zahlen nicht vertraut sind, Schwierigkeiten bereiten. Lediglich zwei Schulbücher unterstützen anfangs auch Sprechweisen entsprechend der Stellenwerte (z. B. dreihundert und vierzig und fünf), die die Aufmerksamkeit auf das wiederholte Bündeln richten und die Zahlwortbildung zunächst außen vorlässt (Gaidoschik, 2015; Schulz & Wartha, 2021). Insgesamt sollte es deshalb in den Schulbüchern mehr und explizitere Hinweise zum Lesen und Schreiben dreistelliger Zahlen geben.

Möglicherweise gehen manche Schulbücher davon aus, dass – im Sinne eine Spiralcurriculums – eine korrekte Zahlwortbildung oder auch das Verständnis anderer Darstellungen bereits in Klasse 2 erworben wurde. Es ist allerdings fraglich, inwieweit ein Transfer des in Klasse 2 Gelernten auf den größeren Zahlenraum gelingen kann, da er kein Automatismus zu sein scheint. Empirische Evidenz diesbezüglich liefert das hierarchische Kompetenzmodell von Herzog et al. (2017), welches das Bündeln und Entbündeln über 100 auf einer höheren Stufe verortet als das Bündeln und Entbündeln im Hunderterraum. Insofern könnte eine ausführlichere Behandlung von Darstellungen, die insbesondere auf deren Eigenschaften und den adäquaten Umgang damit zielt, in Klasse 3 zumindest für einen Teil der Schülerinnen und Schüler hilfreich sein.

7.3 Folgerung für die Aus- und Fortbildung von Lehrkräften

Um das Arbeiten mit Darstellungen im Unterricht adäquat einführen und begleiten zu können, benötigen Lehrkräfte eine Kenntnis der auftretenden Darstellungen und ein Verständnis für die Unterschiede. Zudem müssen sie die jeweiligen Darstellungen adäquat einführen und die Schülerinnen und Schüler in ihrer Nutzung begleiten können. Die Analysen zeigen, dass dies nicht trivial ist. Doch woher erhalten (angehende) Lehrkräfte das dafür notwendige Wissen?

Ein Blick in einschlägige mathematikdidaktische Lehrbücher zeigt, dass z. B. die in 11 der 16 Schulbuchreihen verwendeten Zahlenkarten kaum thematisiert werden. Eine Anleitung für den Einsatz der dort so genannten Stellenwertkarten findet sich nur bei Schipper et al. (2017). Ansonsten wird entweder die Handhabung vorausgesetzt (Käpnick & Benölken, 2020; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018; Rathgeb-Schnierer et al., 2023) oder die Zahlenkarten werden abgebildet, jedoch nicht beschrieben (Padberg & Benz, 2021), oder sie werden überhaupt nicht erwähnt (Schipper, 2009; Schulz & Wartha, 2021). Es bleibt offen, inwieweit die begleitenden Lehrkräftematerialien zu den Schulbüchern diese Lücke füllen können. Dies stellt eine Herausforderung für die Aus- und Fortbildung von Lehrkräften dar, zumal an Grundschulen ein nicht geringer Anteil der Lehrkräfte Mathematik fachfremd unterrichtet (Porsch, 2020). Unklar ist zudem, in welcher Phase der Lehramtsaus- und -fortbildung entsprechende Kompetenzen idealerweise erworben werden können. Wünschenswert wäre, dass sich die mathematikdidaktische Scientific Community dieses Wissenstransfers annimmt, um Lehrkräfte in einem professionellen Umgang mit Darstellungen zu unterstützen.

8. Literaturverzeichnis

Bruner, J. S., Olver, R. R. & Greenfield, P. M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Klett.

Deutscher, T. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern. Eine empirische Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung des Bereichs Muster und Strukturen*. Vieweg + Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8334-6

Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-14775-4

Gaidoschik, M. (2024). Number line estimation tasks: Ein fachdidaktischer Blick auf einen in den kognitiven Neurowissenschaften prominenten Aufgabentyp. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 45. https://doi.org/10.1007/s13138-023-00229-x

Gaidoschik, M. (2015). Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des „Hunderterraums". *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36, 163–190. https://doi.org/10.1007/s13138-015-0071-3

Helmke, A. (2022). *Unterrichtsqualität und Professionalisierung. Diagnostik von Lehr-Lern-Prozessen und evidenzbasierte Unterrichtsentwicklung*. Klett/Kallmeyer.

Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2017). Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses. In A. Fritz, A. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (3. Aufl., S. 266–285). Beltz.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen*. Köster.

Käpnick, F. & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule* (2. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-60872-2

Lenz, K. & Wittmann, G. (2023). Zur Erarbeitung des Teile-Ganzes-Konzepts im mathematischen Anfangsunterricht: Welche Lerngelegenheiten bieten Schulbücher für die erste Klasse? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 44, 441–469. https://doi.org/10.1007/s13138-023-00218-0

Leuders, T. (2014). Aufgaben in Forschung und Praxis. Aufgabenklassifikationen und Aufgabenforschung aus fachdidaktischer Perspektive. In B. Ralle, S. Prediger, M. Hammann & M. Rothgangel (Hrsg.), *Lernaufgaben entwickeln, bearbeiten und überprüfen: Ergebnisse und Perspektiven fachdidaktischer Forschung* (S. 33–50). Waxmann.

Mathe inklusiv mit PIKAS (o.J.). *Dezimalsystem*. https://pikas-mi.dzlm.de/node/529 [02.07.2024]

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern* (2. Aufl.). Haupt.

Mayring, P. & Fenzl, T. (2022). Qualitative Inhaltsanalyse. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (3. Aufl., S. 691–706). Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-37985-8_43

Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik – fundiert, vielseitig, praxisnah* (5. Aufl.). Springer Spektrum.

Porsch, R. (2020). Mathematik fachfremd unterrichten. In R. Porsch & B. Rösken-Winter (Hrsg.), *Professionelles Handeln im fachfremd erteilten Mathematikunterricht* (S. 3–26). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-27293-7

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57477-5

Rathgeb-Schnierer, E., Schuler, S. & Schütte, S. (2023). *Mathematikunterricht in der Grundschule – Lernangebote fachorientiert, kindorientiert und differenziert gestalten*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65856-7

Salle, A., Schmidt-Thieme, B., Schulz, A. & Söbbeke, E. (2023). Darstellen und Darstellungen verwenden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl., S. 429–461). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2693-2

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.

Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. 3. Schuljahr*. Schroedel.

Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Multimedia. *Unterrichtswissenschaft*, 29(4), 292–318. https://doi.org/10.25656/01:7717

Schreier, M. (2014). Varianten qualitativer Inhaltsanalyse: ein Wegweiser im Dickicht der Begrifflichkeiten. *Forum Qualitative Sozialforschung*, 15(1). https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0114-fqs1401185

Schulz, A. & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe. Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62096-0

Schulz, A. & Walter, D. (o.J.). *Stellenwerte üben. Didaktischer Kommentar für Lehrerinnen und Lehrer zu einer Übungsapp für Android-Tablets*. https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/idmi/didaktischerkommentarfinal.pdf [02.07.2024]

Sievert, H., van den Ham, A. K. & Heinze, A. (2021). The role of textbook quality in first graders' ability to solve quantitative comparisons: a multilevel analysis. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1417 – 1431. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01266-x

Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences, 74*, Article101716. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2019.02.006

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern: Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Franzbecker.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2023). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally* (11. Aufl.). Pearson.

Van Steenbrugge, H., Valcke, M., & Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flanders: Does it (not) matter which mathematics textbook series schools choose? *Journal of Curriculum Studies*, 45(3), 322–353. https://doi.org/10.1080/00220272.2012.713995

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Bd. 1, S. 557–628). NCTM.

Wendt, H., Bos, W., Goy, M. & Jusufi, D. (Hrsg.) (2017). *TIMSS 2015. Skalenhandbuch zur Dokumentation der Erhebungsinstrumente und Arbeit mit den Datensätzen*. Waxmann. https://doi.org/10.25656/01:16553

Wirtz, M. A. & Caspar, F. (2002). *Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität*. Hogrefe.

Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung Baden-Württemberg [ZSL] (2024). *Liste der zugelassenen Schulbücher Grundschule. Zulassungen auf der Basis des Bildungsplans 2016. Stand: 05. Mai 2024.*

9. Analysierte Schulbücher

In Klammern sind jeweils die für die Analyse ausgewählten Bereiche angegeben.

Balins, M. et al. (2022). *Fredo 3. Mathematik. Schülerbuch*. Cornelsen (S. 32–45).

Bauer, R. & Maurach, J. (2022). *Einstern 3. Mathematik für Grundschulkinder. Themenheft 1. Die Zahlen bis 1 000. Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1 000. Achsensymmetrie.* Cornelsen (S. 4–24).

Becherer, J. & Schulz, A. (Hrsg.) (2019). *Jo-Jo. Mathematik 3*. Cornelsen (S. 14–22).

Beerbaum, J. et al. (2022). *Flex und Flo Mathematik 3 für die Ausleihe. Themenheft Addieren und Subtrahieren*. Westermann (S. 10–24).

Betz, B. et al. (2017). *Zahlenzauber 3. Schülerbuch. Allgemeine Ausgabe*. Cornelsen (S. 40–49).

Brand, K., Brassat, K. & Hitzel, T. (2020). *Matherad 3. Arbeitsbuch*. Klett/vpm (S. 11–29).

Demirel, Ü. et al. (2013). *eins zwei drei. Mathematik 3. Schülerbuch*. Cornelsen (S. 16–27).

Dietrich, S. et al. (2020). *MiniMax 3. Zahlen und Rechnen. Teil A. Verbrauch*. Klett (S. 14–31).

Keller, K.-H. & Pfaff, P. (Hrsg.) (2017). *Das Mathebuch 3* (3. Aufl.). Mildenberger (S. 18–28).

Klöpfer, D. (Hrsg.) (2016). *Denken und Rechnen 3*. Westermann (S. 22–31).

Laubis, T. (Hrsg.) (2018). *Mathetiger 3*. Mildenberger (S. 13–27).

Manten, U. (Hrsg.) (2015). *Super M 3. Mathematik für alle. Schulbuch*. Cornelsen (S. 14–25).

Mehl, M. et al. (2022). *Nussknacker 3. Mein Mathematikbuch*. Klett (S. 12–19).

Rottmann, T. & Träger, G. (Hrsg.) (2021). *Welt der Zahl 3. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule*. Westermann (S. 18–27).

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2018). *Das Zahlenbuch 3*. Klett (S. 26–39).

Wohlhart, D., Scharnreitner, M. & Kleißner, E. (2017). *Eins plus. Mathematik für die 3. Klasse der Grundschule. Schülerbuch. Band 3*. Helbling (S. 13–19)

Notation

Völker, S., Heck-Ribeiras, P. & Wittmann, G. (2025). Darstellungen zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses im Tausenderraum – Eine Analyse von Schulbüchern für Klasse 3. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis*, *6*. https://doi.org/10.48648/sr1m-4y36

10. Anhang

10.1 Darstellungen im Überblick

Die Tabelle zeigt für ausgewählte Darstellungen, in welchen Schulbüchern sie vorkommen. Nicht aufgenommen wurden Darstellungen, die in allen Schulbüchern verwendet werden.

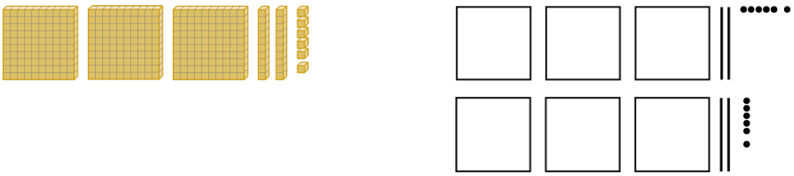
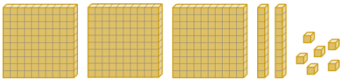
In der Tabelle verwendete Abkürzungen:

Darst.	Darstellungen
Unstrukt. Objekte	Unstrukturierte Objekte
Zehners.-Material	Zehnersystem-Material
Q.-S.-P.-Darst.	Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung
St.tafel m. Objekten	Stellentafel mit Objekten
×	kommt vor
einf.	einfarbig
mehrf.	mehrfarbig
D.	Dienes-Material
G. Perl.	Goldenes Perlenmaterial nach Montessori
St.	Steckwürfel

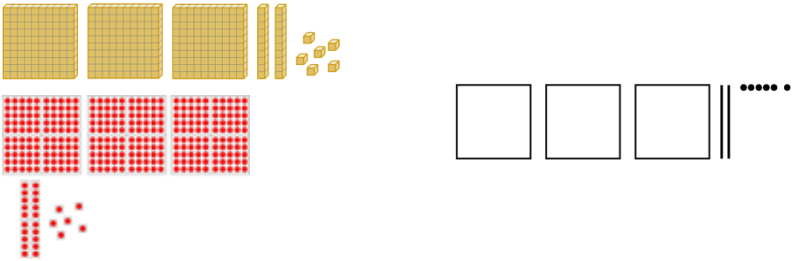
	Depiktionale Darstellungen					Deskriptionale Darstell.	
	Unstrukt. Objekte	Zehners.-Material	Q.-S.-P.-Darst.	Punktebilder	Tausenderfeld	St.tafel m. Objekten	Zahlenkarten
Das Mathebuch	×	St. mehrf.	einf.	×	—	—	mehrf.
Das Zahlenbuch	×	—	einf.	×	×	×	einf.
Denken und Re.	×	D. einf.	—	—	—	—	mehrf.
Eins plus	×	D. mehrf.	Mehrf.	—	—	×	einf.
eins, zwei, drei	×	D. einf.	einf.	—	—	×	mehrf.
Einstern	×	D. einf.	einf.	—	—	—	mehrf.
Flex und Flo	×	—	einf.	×	—	×	—
Fredo	—	D. einf.	einf./mehrf.	—	—	×	mehrf.
Jo-Jo	×	D. einf.	mehrf.	—	×	—	—
Matherad	×	G. Perl.	mehrf.	—	×	×	mehrf.
Mathetiger	×	D. einf.	mehrf.	—	—	×	—
Mini Max	×	D. einf.	einf.	—	—	×	einf./mehrf.
Nussknacker	×	D. einf.	einf.	—	×	×	—
Super M	—	D. einf.	einf.	—	×	×	mehrf.
Welt der Zahl	×	D. einf.	einf./mehrf.	—	—	×	—
Zahlenzauber	×	D. einf.	einf.	—	×	×	mehrf.
Summe ($N = 16$)	14	14	15	3	6	12	11

10.2 Anordnung in Darstellungen

Die Tabelle zeigt die unterschiedlichen Anordnungen von Zehnersystem-Material und Punktebildern sowie der Quadrat-Strich-Punkt-Darstellung. Die Schulbücher sind in der Tabelle entsprechend der senkrechten bzw. waagrechten Anordnung der Zehner bzw. Einer des Zehnersystem-materials bzw. der Punktebilder geordnet.

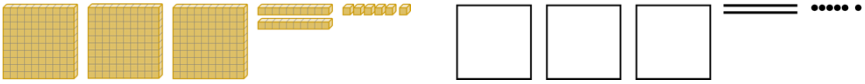
Fredo, Zahlenzauber	
Jo-Jo	
Einstern	
Denken und Rechnen	
	Die Quadrat-Punkt-Strich-Darstellung wird nicht verwendet.

Das Mathebuch



Mathetiger

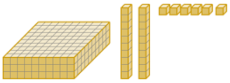
eins, zwei, drei; Welt der Zahl

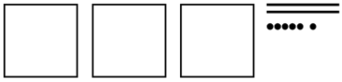


Matherad

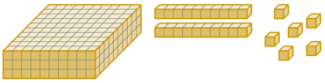
Eins plus

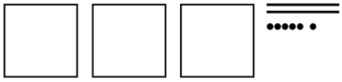
MiniMax



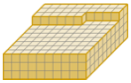


Nussknacker

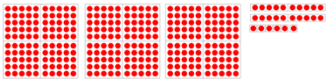


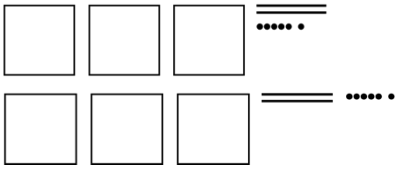
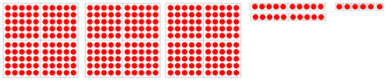
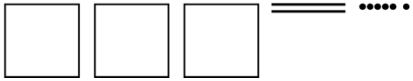


Super M



Das Zahlenbuch





Flex und Flo